Gráfok maximális párosításai

Berge tétele: A G gráf M párosítása pontosan akkor maximális méretű (azaz $|M| = \nu(G)$), ha G-ben nem létezik M-alternáló javító út, azaz olyan M álatal fedetlen pontokat összekötő út, amelynek minden második éle M-beli.

Biz: Ha van ilyen út, akkor annak a mentén cserélve nagyobb párosítást kapunk. Ha nincs ilyen út, és N egy párosítás, akkor $M \cup N$ minden komponense MN-alternáló út vagy kör, de mivel nincs javító út, ezért minden kompnens legalább annyi M-élt tartalmaz, mint N-élt, tehát $|M| \geq |N|$. $\square$

Berge tétele miatt a maximális párosítás keresése visszavezethető M-alternáló javító út keresésére.

Edmonds algoritmusa: Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és minden fázisban vagy növeljük M méretét, vagy arra jutunk, hogy M maximális. Minden fázisban egy M-alternáló erdőt építünk az alábbi tulajdonságokkal. (1) Az M által fedetlen csúcsok pontosan az erdő komponenseinek gyökerei. (2) Ha az erdő egy csúcsát fedi az M párosítás, akkor a csúcsot fedő párosításél az erdőhöz tarozik. (3) Az erdő minden komponense olyan fa, amelynek a gyökérből induló útjain felváltva következnek M-en kívüli és M-beli élek.

Az erdőben a gyökértől páros távolságra levő csúcsok *külső*, a páratlan távolságra levők pedig *belső* csúcsok, az erdőhöz nem tartozó csúcsok a *tisztást* alkotják. Az (1) tulajdonság miatt a tisztást teljesen fedi az M párosítás.

(I) Ha G-nek van külső csúcsból tisztásra vezető éle, akkor az M alternáló erdő ezen éllel, és a csatlakozó M-beli párosításéllel növelhető.

(II) Ha G-nek van külső csúcsok között futó éle, akkor
(a) ha ez ez él az erdő két komponense között fut, akkor egy M-alternáló javító utat kaptunk, ami mentén cserélve növeljük $|M|$-et, a fázis véget ér.
(b) Ha azonban ez az él az erdő egy komponensén belül fut, akkor egy páratlan kört („blossom”-ot, vagy „kelyhet”) határoz meg. Ennek csúcsait egy pontba olvasztjuk, ami külső csúcs lesz, és innen folytatjuk az algoritmust. Az egybeolvasztás a páratlan kör éleinek összehúzását jelenti azzal a különbséggel, hogy a hurokéleket elhagyjuk és a keletkező párhuzamos élekből csak egy példányt tartunk meg.

(III) Ha G-nek nem fut külső csúcsból se külső csúcsba, se a tisztásra éle, akkor az algoritmus véget ér, az output az M párosítás.

Az Edmonds-algoritmus helyességéhez azt fogjuk igazolni, hogy M maximális párosítás.

Megfigyelés: (1) Ha egy (IIb)-beli egybeolvasztás után találunk M-alternáló javító utat, akkor ebből képezhetünk az egybeolvasztás előtti gráfban is egy M-alternáló javító utat. (Ha u.i. ez az út tartalmazza az éppen egybeolvasztott csúcsot, akkor a ptn kör mentén megfelelő irányban kell haladni a két érintett csúcs között.)
(2) Az algoritmus során minden belső csúcs a G egyetlen csúcsának, minden külső csúcs a G páratlan sok csúcsának felel meg.

Lemma: Tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfra és $X \subseteq V$ ponthalmazra $\nu(G) \leq \frac{1}{2} \cdot (|V| - o(G - X) + |X|)$ teljesül, ahol $o(H)$ a H gráf páratlan számú csúcsot tartlmazó komponensei számát jelöli.

Biz: Tetszőleges M párosítás esetén a $G - X$ minden K páratlan komponensének legalább egy olyan csúcsa van, amelyből nem indul K-n belül haladó M-beli él. Ezért az M által fedetlen csúcsok száma legalább $o(G - X) - |X|$, tehát $|M| \leq \frac{1}{2} \cdot (|V| - o(G - X) + |X|)$. $\square$

Köv.: Tetszőleges G véges gráfra teljesül az alábbi két tulajdonság.
(1) Az Edmonds-algoritmus outputja a G egy maximális méretű párosítása.
(2) **(Berge-Tutte-formula)** $\nu(G) = \frac{1}{2} \cdot \min\{(|V| - o(G - X) + |X|) : X \subset V\}$.

A két következményt egyszerre igazoljuk.

Biz: Az Edmonds-algoritmus végén a külső csúcsok csak belső csúcsokkal szomszédosak. Ha tehát X a belső csúcsok halmaza, akkor X törlése után minden külső csúcs izolált lesz, azaz $G - X$ egy páratlan komponensének felel meg. Ezért $G - X$ ptn komponenseinek száma annyival több X-nél, mint amennyi az algoritmus végén kapott M párosítás által fedetlen csúcsok száma, azaz $|M| = \frac{1}{2} \cdot (|V| - o(G - X) + |X|)$. Láttuk, hogy a jobboldal felső korlát a G-beli párosítás lehetséges méretére, ezért $|M| = \nu(G)$. $\square$

A Berge-Tutte-formula kicsit bonyolult, alkalmazásakor szerencsésebb a párosítás által fedetlen pontokra koncentrálni, hiszen egy párosítás pontosan akkor maximális méretű, ha a párosítás által fedetlen pontok száma minimális. Érdemes a kapcsolódó konkrét formulát is igazolni.

Köv.: Ha G véges gráf, akkkor G tetszőleges maximális párosítása $\max\{o(G-X)-|X| : X \subseteq V(G)\}$ csúcsot hagy fedetlenül.

Biz: A Berge-Tutte-formulából $|V|-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\min\{(|V|-o(G-X)+|X|) : X\subset V\} = -\min\{-o(G-X)+|X| : X\subset V\} = \max\{o(G-X)-|X| : X\subseteq V(G)\}$ adódik a fedetlen csúcsok számára. □

Köv.: (Tutte tétele) A G gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha $o(G-X)\le|X|$ teljesül minden $X\subseteq V(G)$ ponthalmazra.

Biz: A G gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha a párosítás által fedetlenül hagyott csúcsok számának minimuma 0. Így a tétel közvetlenül adódik az előző Következményből. □

A továbbiakban az Edmonds-algoritmus által megtalált belső csúcsok X halmaza által meghatározott $G-X$ gráf páratlan komponenseit vizsgáljuk.

Def: A $G=(V,E)$ gráf *(faktor-)kritikus*, ha $G-v$-nek van teljes párosítása $\forall v\in V(G)$-re.

Állítás: Az Edmonds-algoritmus futása során mindvégig igaz, hogy tetszőleges külső csúcsnak megfelelő ponthalmaz kritikus gráfot feszít G-ben.

Biz: Ez az erdő építésének kezdetén így van, hisz minden külső csúcs egyetlen (M által fedetlen) G-beli csúcs, és az egycsúcsú gráf definíció szerint kritikus. A fa növelésekor az új külső csúcs szintén egy pontnak felel meg. A páratlan kör összeolvasztásával kapott külső csúcsnak megfelelő feszített részgráf kritikus volta pedig abból következik, hogy ha ptn sok, egymástól diszjunkt kritikus gráfot egy kör mentén összekötünk, és esetleg további éleket húzunk be ezen kritikus gráfo közé, akkor az így kapott gráf is kritkus lesz: bármely v csúcsához könnyen található (a részek kritikusságának felhasználásával) egy v-n kívül minden más csúcsot fedő párosítás. □

Megjegyzés: Az órán az egyes külső csúcsok feszítette részgráfok kritikus tulajdonságát „fordítva” láttuk be: nem azt figyeltük, hogy hogyan alakul ki az adott külső csúcs az alagoritmus futása nyomán, hanem a végső állapotban kapott külső csúcsot alakítottuk vissza feszített részgráffá. Ennek során az alábbi tulajdonságokat használtuk fel.

Megfigyelés: (1) K_1 kritikus gráf. (2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk. (3) Kritikus gráf egy csúcsába páratlan kört fújva szintén kritikus gráfot kapunk, ahol egy csúcsba történő köbefújás a kör egybeolvasztásának megfordítása. □

Megfigyelés: Ha N a G maximális méretű párosítása, akkor N fedi az Edmonds-algoritmus végső állapotának megfelelő összes belső és tisztásbeli csúcsot, azaz az N által fedetlen csúcsok mindegyike egy külső csúcsnak megfelelő ponthalmazhoz tartozik. Továbbá, ha v egy ilyen külső csúcsnak megfelelő ponthalmazban van, akkor G-nek van olyan maximális méretű párosítása, ami nem fedi v-t.

Biz: Ha egy N párosítás nem fed egy belső csúcsot, akkor a külső csúcsoknak megfelelő páratlan komponenseknek legalább eggyel több csúcsa marad fedetlen, mint az Edmonds-algoritmus által megtalált M párosítás esetén. Ezért minden maximális méretű párosításnak minden belső csúcsot le kell fednie. Ha N a tisztás egy u csúcsát nem fedi, akkor a $G-u$ gráfból elhagyva a belső csúcsokat, eggyel több páratlan komponens keletkezik, mint G esetén. Ezért $G-u$ bármely párosítása legalább eggyel több pontot hagy fedetlenül, mint az Edmonds-algoritmus M outputja. Ezért a tisztás minden csúcsát is fedi G minden maximális méretű párosítása.

Ha pedig a $v\in V(G)$ csúcs egy w külső csúcshoz tartozik, akkor a következőképpen találhatunk egy M-mel megegyező méretű, v-t elkerülő párosítást. Legyen u a végső M-alternáló erdő w-t tartalmazó komponensének gyökere. Úgy módosítjuk M-et, hogy az M-alternáló erdő uw útján az M-beli éleket elhagyjuk a párosításból, az M-en kívülieket pedig bevesszük a párosításba. A w-hez tartozó G-beli csúcsok feszítette faktorkritikus G_w részgráfban pedig az M-beli éleket kicseréljük a G_w egy v-t elkerülő párosítására. Így olyan v-t elkerülő N párosítást kapunk, amire $|M|=|N|$, tehát G minden külső csúcsba olvasztott csúcsát elkerüli G egy maximális párosítása. □

Def: A $G=(V,E)$ véges gráf esetén $D(G)=\{v\in V : \nu(G)=\nu(G-v)\}$ a maximális párosítás által elkerülhető pontok halmaza, $A(G)=N(D(G))-D(G)$ az előbbi pontokkal szomszédos további csúcsok, $C(G)=V\setminus(D(G)\cup A(G))$ a maradék pontok halmaza.

Köv.: (Edmonds-Gallai struktúratétel) Tetszőleges $G=(V,E)$ véges gráfra az $X=A(G)$ optimális választás a Berge-Tutte formulában: $\nu(G)=\frac{1}{2}\cdot(|V|-o(G-A(G))+|A(G)|)$. A $D(G)$-beli csúcsok alkotják a $G-A(G)$ gráf páratlan komponenseit, a $C(G)$-beliek pedig a párosakat.

Biz: Láttuk, hogy $D(G)$ az Edmonds-algoritmus végén a külső csúcsokba olvasztott G-beli csúcsok halmaza. Így $A(G)$ a belső csúcsok halmaza, a tisztás pedig $C(G)$. □