# Bevezetés a számításelméletbe 1.

9. gyakorlat, 2012. április 4. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu,
www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

## Tudnivalók

**Def:** Legyen $\mathcal{A}: U \to V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ az $U$, $B_2$ pedig a $V$ bázisa. Az $\mathcal{A}$ *leképezés mátrixa* $[\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2}|[\mathcal{A}(u_2)]_{B_2}|\cdots|[\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az $i$-dik oszlop az $i$-dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

**Állítás:** Ha $\mathcal{A}: U \to V$ lin. lekép. és $B_1 \subseteq U$ és $B_2 \subseteq V$ bázisok akkor$[\mathcal{A}(u)]_{B_2} = [\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1}[u]_{B_1}$ $\forall u \in U$, azaz a leképezett vektor koordinátavektorát úgy kapjuk, hogy a kiindulási vektor koordinátavektorát balról megszorozzuk a leképezés mártixával.
Ha pedig $\mathcal{B}: V \to W$ is lin. lekép. és $B_3 \subseteq W$ bázis, akkor a kompozíció is lineáris leképezés, aminek mátrixa $[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{B_3}^{B_1} = [\mathcal{B}]_{B_3}^{B_2} \cdot [\mathcal{A}_{B_2}^{B_1}$. (Természetesen $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(u) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(u))$.)

**Def:** Az $u \in V$ vektor a $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lin. trafó $\lambda \in \mathbb{R}$ *sajátértékhez* tartozó *sajátvektora*, ha (1) $u \neq \underline{0}$ és (2) $\mathcal{A}(u) = \lambda \cdot u$. A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ *sajátértékhez* tartozó *sajátvektora*, ha (1) $\underline{v} \neq \underline{0}$ és (2) $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u}$. A $\lambda$ sajátértékhez tartozó *sajátaltér*: $\{u \in V : \mathcal{A}(u) = \lambda \cdot u\}$ ill. . $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : A\underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}\}$ attól függően, hogy lineáris transzformációról, vagy mátrixról beszélünk.

**Tétel:** Lineáris transzformáció minden sajátvektora pontosan egy sajátértékhez tartozik.
A $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból áll.
A $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér altér.

**Áll.:** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátalterének elemei pontosan a $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$ mátrixos alakban felírt (homogén) lineáris egyenletrendszer megoldásai lesznek. (Ha $\lambda$ nem sajátérték, akkor csak a $\mathbf{0}$ lesz megoldás, azaz nincs $\lambda$-hoz tartozó sajátvektor.)

**Tétel:** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor sajátértéke, ha $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

**Def:** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *karakterisztikus polinomja* $k_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ .

**Tétel:** A karakterisztikus polinom független a mátrixalak felírásához használt bázistól.

**Sajátdolgok számítása** Adott mátrix sajátértékei meghatározhatók a karakterisztikus polinom gyökeiként, adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig egy homogén (azaz jobboldalán $\mathbf{0}$-t tartalmazó) lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiként adódnak.

## Gyakorlatok

1. Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációra $\mathrm{Im}\ (\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{A}^2 = 0$.
2. A $V$ valós vektortérnek legyen $W$ egy altere. Adjunk példát olyan lineáris transzformációra, melynek $W$ a képtere. Olyanra is, amelynek $W$ a magtere.
3. Bármely $\mathcal{A}$ lineáris leképezésre pontosan akkor lesz $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$, ha $u - v \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.
4. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat: (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor. (b) Bármely két vektor képe különböző.
5. Mely valós vektortereknek létezik olyan $\mathcal{A}$ lineáris transzformációja, amire $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\ (\mathcal{A})$?
6. Legyenek $\mathcal{A}: U \to V$ tetszőleges lineáris leképezés, $A$ pedig $\mathcal{A}$ (valamely bázisokban felírt) mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy $r(A) = \dim(\mathrm{Im}\ \mathcal{A})$ .
7. Jelölje $f$ egy $n$ dimenziós vektortér olyan lineáris transzformációját, melynek $A$ mátrixára teljesül, hogy $A \cdot A = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a csupa 0 mátrix. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim(\mathrm{Ker} f) \geq \frac{n}{2}$. (ZH '98)
8. Adjuk meg annak a $\phi$ lineáris leképezésnek a magterét, amelynek mátrixa $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
(V '00)
9. Adjuk meg $\mathrm{Im}\ (\mathcal{A})$ és $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ egy bázisát, ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ az $\mathcal{A}$ leképezés mátrixa.
(ZH '01)

10. A síknak, mint valós vektortérnek lineáris transzformációi a tengelyekre való tükrözések, az $y = x$ egyenesre való tükrözés, és minden $\alpha$ szögű, origó körüli elforgatás. Adjuk meg e leképezések mátrixát a szokásos bázisban.
11. A legfeljebb 10-edfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak R felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy $\Phi$ lineáris transzformációja. Írjuk fel $\Phi$ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban és határozzuk meg a kép- ill. magterét.
12. Tekintsük a 3-dimenziós valós térnek azt az $\mathcal{A}$ lieáris transzformációját, amit úgy kapunk, hogy alkalmazzuk a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix által leírt lineáris transzformációt, majd az így kapott vektort vetítjük az $yz$ síkra az origó körül elforgatjuk 90°-kal úgy, hogy az $y$ tengely a $z$ tengelyre kerüljön. Határozzuk meg $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban.
13. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és a sajátaltereit, ha vannak.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Mik lehetnek az $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$ transzformáció sajátértékei, ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(v)$ minden $v \in V$ vektorra? (ZH '98)
15. Igazoljuk, hogy ha a $\lambda$ skalár sajátértéke az $A$ mátrixnak, akkor sajátértéke az $A^T$ mátrixnak is. (ZH '98)
16. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A$ invertálható mátrixnak sajátértéke a $\lambda$ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az $A$ mátrix $A^{-1}$ inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám. (ZH '99)
17. Határozzuk meg a $c$ paraméter értékét úgy, hogy az $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & c \end{pmatrix}$ mátrixnak a $\lambda = 3$ sajátértéke legyen! Határozzuk meg ekkor a legnagyobb sajátértéket, és keressünk egy ehhez tartozó sajátvektort is. (ZH '04)
18. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációt *tükrözés*nek nevezzük, ha a $V$ valós vektortér tetszőleges $v$ vektorára $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$ teljesül. Mi lehet a tükrözés mátrixának a determinánsa? Határozzuk meg a tükrözés transzformáció lehetséges sajátértékeit! (ZH '00)