

Bevezetés a számításelméletbe 1.

8. gyakorlat, 2012. március 28. 8²⁰, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetszőleges $n \times k$ méretű valós mátrix. Ekkor

$s(A) := \dim\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, azaz A lin ftn sorainak max száma az A mátrix *sorrangja*.

$o(A) := \dim\langle A^1, A^2, \dots, A^k \rangle$, azaz A lin ftn oszlopainak max száma az A mátrix *oszloprangja*.

$d(A) := A$ legnagyobb nemnulla aldeterminánsának mérete az A mátrix *determinánsrangja*.

Megf.: Tetsz A valós mxra (1) $d(A) = d(A^T)$, (2) $o(A) = s(A^T)$, (3) ha A lépcsős alakú, akkor $s(A) = d(A)$.

Áll.: Elemi sorkvivalens átalakítás se a sorrangot, sem a determinánsrangot nem változtatja meg.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A)$.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A) = o(A)$, és ez az A mátrix $r(A)$ rangja.

Tétel: Tetszőleges A mátrix rangja megegyezik a Gauss-elimináció után kapott vezéregyeselek számával.

Def: A valós vektorterek közötti $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ leképezés *lineáris*, ha műveletterató, azaz

(1) additív: $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U$ ill. (2) homogén: $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}(u) \quad \forall \lambda \in T, \forall u \in U$.

Az $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ lineáris leképezés neve *lineáris transzformáció*. Lineáris leképezésben a lineáris kombináció képe a képek lineáris kombinációja, azaz az (1) és (2) helyett megkövetelhető a

(3) $\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{A}(u) + \mu \mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tulajdonság, vagy az annál is erősebb „lineáris kombináció tartási” tulajdonság: (3') $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 \mathcal{A}(u_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(u_2) + \dots + \lambda_k \mathcal{A}(u_k)$.

Állítás: A lineáris leképezést a báziselemeken felvett képek egyértelműen meghatározzák. Pontosabban: Ha U és V T feletti vt-k, u_1, u_2, \dots, u_n az U bázisa és $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ tetszőleges, akkor pontosan egy $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés létezik, amire $\mathcal{A}(u_i) = v_i \quad \forall i$ -re.

Def: Az $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés

képtere $\text{Im } \mathcal{A} := \{\mathcal{A}(u) : u \in U\}$ (mindazon V -beli vektorok, amelyek előállnak U -beli vektor képeként),

magtere pedig $\text{Ker } \mathcal{A} := \{u \in U : \mathcal{A}(u) = \mathbf{0}\}$ (mindazon U -beli vektorok, amik $\mathbf{0}$ -ba képződnek).

Állítás: Ha $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lin. lekép., akkor $\text{Ker } \mathcal{A} \leq U$ és $\text{Im } \mathcal{A} \leq V$, tehát a magtér és a képtér alterek.

Dimenziótétel: Ha $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lin. lekép., akkor $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim U$.

Def: Legyen $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ az U , B_2 pedig a V bázisa. Az \mathcal{A} leképezés mátrixa $[\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2} | [\mathcal{A}(u_2)]_{B_2} | \dots | [\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az i -dik oszlop az i -dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

Gyakorlatok

1. OHV
2. Legyen az A mátrixnak 100 oszlopa, jelölje B az A első 70 oszlopa által alkotott mátrixot, J az utolsó 70 oszlop, C pedig a középső 40 oszlop által meghatározott mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy $r(B) + r(J) \geq r(A) + r(C)$. (ZH '04)
3. Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < n$, akkor az AB mátrix szinguláris, azaz nem invertálható.
4. Határozzuk meg annak az $(n \times n)$ -es mátrixnak a rangját, melynek az (i, j) pozícióban álló eleme $x_i x_j$ valamely rögzített x_1, x_2, \dots, x_n esetén! (GyIV '04)
5. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy erre nem mindig elegendő az egy sorral bővítés.
6. Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$ méretű A mátrix rangja n , akkor A -nak van olyan eleme, amit alkalmas módon megváltoztatva a kapott mátrix rangja n -nél kisebb lesz.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer tetszőleges (értelmes) b vektorra megoldható.
8. Tegyük fel, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix rangja k , ahol $k < m < n$. Határozzuk meg, legalább hány elemét kell A -nak megváltoztatni ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja a lehető legnagyobb legyen.
9. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges (u, v) vektor képe a) $\mathcal{A}(u, v) = (-u, 2v)$, b) $\mathcal{A}(u, v) = (uv, v)$, c) $\mathcal{A}(u, v) = (4, 3u)$ ill. d) $\mathcal{A}(u, v) = (u + v, 0)$?
10. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel \mathcal{A} az $(5, 6)$ vektorhoz?

11. Legyen \mathcal{A} lineáris leképezés V_1 -ből V_2 -be, valamint $v_1, \dots, v_k \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha v_1, \dots, v_k generátorrendszer V_1 -ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ is generátorrendszer V_2 -ben.
b) Ha a v_1, \dots, v_k vektorok függetlenek, akkor az $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok is függetlenek.
c) Ha az $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok függetlenek, akkor a v_1, \dots, v_k vektorok is függetlenek.
12. Határozzuk meg, hogy a sík helyvektorainak alábbi transzformációi közül melyek a lineáris leképezések: nemnulla vektorral eltolás, (origó körüli) elforgatás, tengelyes tükrözés, középpontos hasonlóság, tengelyes affinitás.
13. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \rightarrow V$ lineáris leképezések, akkor a $x \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$ leképezés is lineáris?
14. Az \mathcal{A} lineáris transzformációra $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A})$. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{A}^2 = 0$.
15. A V valós vektortérnek legyen W egy altere. Adjunk példát olyan lineáris transzformációra, melynek W a képtere. Olyanra is, amelynek W a magtere.
16. Bármely \mathcal{A} lineáris leképezésre pontosan akkor lesz $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$, ha $u - v \in \text{Ker}(\mathcal{A})$.
17. Tudjuk, hogy egy \mathcal{A} lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat: (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor. (b) Bármely két vektor képe különböző.
18. Mely valós vektortereknek létezik olyan \mathcal{A} lineáris transzformációja, amire $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{Im}(\mathcal{A})$?
19. A háromdimenziós helyvektorokhoz rendeljük az xy síkra vett vetületüknek az origó körüli 90° -os elforgatottját. Lineáris-e az így kapott leképezés? Ha igen, akkor adjuk meg egy általunk választott bázisokhoz tartozó mátrixát.
20. A síknak, mint valós vektortérnek lineáris transzformációi a tengelyekre való tükrözések, az $y = x$ egyenesre való tükrözés, és minden α szögű, origó körüli elforgatás. Adjuk meg e leképezések mátrixát a szokásos bázisban.
21. A legfeljebb 10-edfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak \mathbb{R} felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban és határozzuk meg a kép- ill. magterét.
22. Legyen P_5 a legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok tere. Tekintsük azt az $f : P_5 \rightarrow P_5$ leképezést, melynél $f(p(x)) = \alpha p'(x) + \beta$ valamely rögzített (α, β) valós számokra. Határozzuk meg az összes olyan (α, β) párt, amire az f leképezés lineáris lesz. Ha f lineáris leképezés, adjuk meg egy mátrixát is. (ZH '00)