Bevezetés a számításelméletbe 1.

8. gyakorlat, 2012. április 5. $16^{\underline{00}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tetszőleges $n \times k$ méretű valós mátrix. Ekkor
$s(A) := \dim\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$, azaz A lin ftn sorainak max száma az A mátrix *sorrangja.*
$o(A) := \dim\langle A^1, A^2, \ldots, A^k\rangle$, azaz A lin ftn oszlopainak max száma az A mátrix *oszloprangja.*
$d(A) :=$ A legnagyobb nemnulla aldeterminánsának mérete az A mátrix *determinánsrangja.*

Megf.: Tetsz A valós mxra (1) $d(A) = d(A^T)$, (2) $o(A) = s(A^T)$, (3) ha A lépcsős alakú, akkor $s(A) = d(A)$.

Áll.: Elemi sorekvivalens átalakítás se a sorrangot, sem a determinánsrangot nem változtatja meg.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A)$.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A) = o(A)$, és ez az A mátrix $r(A)$ *rangja.*

Tétel: Tetszőleges A mátrix rangja megegyezik a Gauss-elimináció után kapott vezéregyesek számával.

Def: A valós vektorterek közötti $\mathcal{A} : U \to V$ leképezés *lineáris*, ha műveletterató, azaz
(1) additív: $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U$ ill. (2) homogén: $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda\mathcal{A}(u) \quad \forall\lambda \in T,\ \forall u \in U$.
Az $\mathcal{A} : U \to U$ lineáris leképezés neve *lineáris transzformáció*. Lineáris leképezésben a lineáris kombináció képe a képek lineáris kombinációja, azaz az (1) és (2) helyett megkövetelhető a
(3) $\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda\mathcal{A}(u) + \mu\mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tulajdonság, vagy az annál is erősebb „lineáris kombináció tartási" tulajdonság: (3') $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k) = \lambda_1\mathcal{A}(u_1) + \lambda_2\mathcal{A}(u_2) + \ldots + \lambda_k\mathcal{A}(u_k)$.

Állítás: A lineáris leképezést a báziselemeken felvett képek egyértelműen meghatározzák. Pontosabban: Ha U és V T feletti vt-k, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az U bázisa és $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tetszőleges, akkor pontosan egy $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés létezik, amire $\mathcal{A}(u_i) = v_i \quad \forall i$-re.

Def: Az $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés
képtere $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} := \{\mathcal{A}(u) : u \in U\}$ (mindazon V-beli vektorok, amelyek előállnak U-beli vektor képeként),
magtere pedig $\mathrm{Ker}\mathcal{A} := \{u \in U : \mathcal{A}(u) = (\mathbf{0})\}$ (mindazon U-beli vektorok, amik $\mathbf{0}$-ba képződnek).

Állítás: Ha $\mathcal{A} : U \to V$ lin. lekép., akkor $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \le U$ és $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \le V$, tehát a magtér és a képtér alterek.

Dimenziótétel: Ha $\mathcal{A} : U \to V$ lin. lekép., akkor $\dim\mathrm{Ker}\mathcal{A} + \dim\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \dim U$.

Def: Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ az U, B_2 pedig a V bázisa. Az $\mathcal{A}$ *leképezés mátrixa* $[\mathcal{A}]^{B_1}_{B_2} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2}|[\mathcal{A}(u_2)]_{B_2}|\cdots|[\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az i-dik oszlop az i-dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

Def: Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ az U, B_2 pedig a V bázisa. Az $\mathcal{A}$ *leképezés mátrixa* $[\mathcal{A}]^{B_1}_{B_2} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2}|[\mathcal{A}(u_2)]_{B_2}|\cdots|[\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az i-dik oszlop az i-dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

Állítás: Ha $\mathcal{A} : U \to V$ lin. lekép. és $B_1 \subseteq U$ és $B_2 \subseteq V$ bázisok akkor$[\mathcal{A}(u)]_{B_2} = [\mathcal{A}]^{B_1}_{B_2}[u]_{B_1}$ $\forall u \in U$, azaz a leképezett vektor koordinátavektorát úgy kapjuk, hogy a kiindulási vektor koordinátavektorát balról megszorozzuk a leképezés mártixával.
Ha pedig $\mathcal{B} : V \to W$ is lin. lekép. és $B_3 \subseteq W$ bázis, akkor a kompozíció is lineáris leképezés, aminek mátrixa $[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]^{B_1}_{B_3} = [\mathcal{B}]^{B_2}_{B_3} \cdot [\mathcal{A}^{B_1}_{B_2}$. (Természetesen $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(u) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(u))$.)

Gyakorlatok

1. Legyen az A mátrixnak 100 oszlopa, jelölje B az A első 70 oszlopa által alkotott mátrixot, J az utolsó 70 oszlop, C pedig a középső 40 oszlop által meghatározott mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy $r(B) + r(J) \ge r(A) + r(C)$. (ZH '04)
2. Határozzuk meg annak az $(n \times n)$-es mátrixnak a rangját, melynek az (i, j) pozícióban álló eleme $x_i x_j$ valamely rögzített $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esetén! (GyIV '04)

3. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy erre nem mindig elegendő az egy sorral bővítés.
4. Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$ méretű A mátrix rangja n, akkor A-nak van olyan eleme, amit alkalmas módon megváltoztatva a kapott mátrix rangja n-nél kisebb lesz.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer tetszőleges (értelmes) b vektorra megoldható.
6. Tegyük fel, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix rangja k, ahol $k < m < n$. Határozzuk meg, legalább hány elemét kell A-nak megváltoztatni ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja a lehető legnagyobb legyen.
7. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges (u, v) vektor képe a) $\mathcal{A}(u, v) = (-u, 2v)$, b) $\mathcal{A}(u, v) = (uv, v)$, c) $\mathcal{A}(u, v) = (4, 3u)$ ill. d) $\mathcal{A}(u, v) = (u + v, 0)$?
8. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel $\mathcal{A}$ az $(5, 6)$ vektorhoz?
9. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ből V_2-be, valamint $v_1, \dots, v_k \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha $v_1, \dots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ is generátorrendszer V_2-ben.
   b) Ha a $v_1, \dots, v_k$ vektorok függetlenek, akkor az $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok is függetlenek.
   c) Ha az $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok függetlenek, akkor a $v_1, \dots, v_k$ vektorok is függetlenek.
10. Határozzuk meg, hogy a sík helyvektorainak alábbi transzformációi közül melyek a lineáris leképezések: nemnulla vektorral eltolás, (origó körüli) elforgatás, tengelyes tükrözés, középpontos hasonlóság, tengelyes affinitás.
11. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$ lineáris leképezések, akkor a $x \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$ leképezés is lineáris?
12. Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációra $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{A}^2 = 0$.
13. A V valós vektortérnek legyen W egy altere. Adjunk példát olyan lineáris transzformációra, aminek W a képtere. Olyanra is, aminek W a magtere.
14. Bármely $\mathcal{A}$ lineáris leképezésre pontosan akkor lesz $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$, ha $u - v \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.
15. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat: (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor. (b) Bármely két vektor képe különböző.
16. Mely valós vektortereknek létezik olyan $\mathcal{A}$ lineáris transzformációja, amire $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\,(\mathcal{A})$?
17. A háromdimenziós helyvektorokhoz rendeljük az xy síkra vett vetületüknek az origó körüli $90°$-os elforgatottját. Lineáris-e az így kapott leképezés? Ha igen, akkor adjuk meg egy általunk választott bázishoz tartozó mátrixát.
18. A síknak, mint valós vektortérnek lineáris transzformációi a tengelyekre való tükrözések, az $y = x$ egyenesre való tükrözés, és minden α szögű, origó körüli elforgatás. Adjuk meg e leképezések mátrixát a szokásos bázisban.