Bevezetés a számításelméletbe 1.

7. gyakorlat, 2012. március 21. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`, `www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: I_n jelöli az $n \times n$ méretű *egységmátrixot*, amire $(I_n)_i^j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Áll.: $A \cdot I_n = A$ és $I_n \cdot B = B$ tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ill. $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixokra.

Def: A $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix az $A \in R^{n \times n}$ mátrix *balinverze*, ha $B \cdot A = I_n$, a $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig A *jobbinverze*, ha $A \cdot J = I_n$. Az A *inverze* olyan A^{-1} mátrix, ami egyszerre bal- és jobbinverze is A-nak.

Áll.: Ha A-nak létezik jobb- és balinverze, akkor azok egyenlők.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik jobbinverze, ha $\det A \neq 0$.

Köv.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik balinverze, ha $\det A \neq 0$.

Áll.: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\det A \neq 0$, akkor $(A^{-1})_i^j = \frac{A_{j,i}}{|A|}$.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverze megkapható az $(A|I_n)$ mátrix RLA-ra hozásával: ha a RLA $(I_n|X)$ alakú, akkor X az inverz, ha nem, akkor $\det A = 0$ és A-nak nincs inverze.

Def: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$. $s(A) := \dim\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$, azaz A lin ftn sorainak max száma az A mátrix *sorrangja.*
$o(A) := \dim\langle A^1, A^2, \ldots, A^k \rangle$, azaz A lin ftn oszlopainak max száma az A mátrix *oszloprangja.*
$d(A) :=$ A legnagyobb nemnulla aldeterminánsának mérete az A mátrix *determinánsrangja.*

Megf.: Tetsz A valós mxra (1) $d(A) = d(A^T)$, (2) $o(A) = s(A^T)$, (3) ha A lépcsős alakú, akkor $s(A) = d(A)$.

Tétel: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A)$.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A) = o(A)$, és ez az A mátrix $r(A)$ *rangja.*

Tétel: Tetszőleges A mátrix rangja megegyezik a Gauss-elimináció után kapott vezéregyesek számával.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzeit!
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 8 & 3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
2. Jelölje I_n' azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek a mellékátlójában 1-esek állnak, a többi mezőn pedig 0. Mi az I_n' és az $I_n + I_n'$ mátrixok inverze? Ha A egy $n \times n$ méretű mátrix, mik lesznek az $I_n' \cdot A$ és a $A \cdot I_n'$ mátrixok?
3. Legyen A olyan 33×33-as mátrix, melyre $A = -A^T$. Bizonyítsuk be, hogy A szinguláris, azaz nem invertálható.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix invertálható, és AB pedig egy (A-val nem feltétlenül azonos méretű) csupa0 mátrix , akkor B is csupa0 mátrix.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A $(n \times n)$-es invertálható mátrix minden eleme páros, akkor az A^{-1} mátrixnak legalább n eleme nem egész! (GyIV '04)
6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1} \cdot B^{-1}$ szorzatot! (pZH '07)
7. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Legyen $X := A \cdot B^{-1}$ és $Y := B \cdot (A^{-1})^2$. Számítsuk ki az $X \cdot Y$ mátrix inverzét. (ppZH '07)
8. Döntsük el, invertálhtató-e az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, adjuk meg az inverzét. (ZH '05)

   Ugyanez a kérdés az $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 7 & -16 \\ -5 & 11 & -25 \end{pmatrix}$ mátrixokra. (pZH '05)
9. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B olyan 101×101 méretű mátrixok, hogy A invertálható és $(AB)^T = -BA$, akkor $\det B = 0$ áll!
10. Számolgassuk konkrét mátrixok rangjait.
11. Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és $r(B) < n$, akkor $r(AB) < n$ (ZH '04)

12. Bizonyítsuk be, hogy ha M és N összeszorozható mátrixok, akkor $r(MN) \leq \min\{r(M), r(N)\}$.
13. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. (ZH '02)
14. Legyen az A mátrixnak 100 oszlopa, jelölje B az A első 70 oszlopa által alkotott mátrixot, J az utolsó 70 oszlop, C pedig a középső 40 oszlop által meghatározott mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy $r(B) + r(J) \geq r(A) + r(C)$. (ZH '04)
15. Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < n$, akkor az AB mátrix szinguláris, azaz nem invertálható.
16. Határozzuk meg annak az $(n \times n)$-es mátrixnak a rangját, melynek az (i, j) pozícióban álló eleme $x_i x_j$ valamely rögzített $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esetén! (GyIV '04)
17. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy erre nem mindig elegendő az egy sorral bővítés.
18. Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$ méretű A mátrix rangja n, akkor A-nak van olyan eleme, amit alkalmas módon megváltoztatva a kapott mátrix rangja n-nél kisebb lesz.
19. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer tetszőleges (értelmes) b vektorra megoldható.
20. Tegyük fel, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix rangja k, ahol $k < m < n$. Határozzuk meg, legalább hány elemét kell A-nak megváltoztatni ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja a lehető legnagyobb legyen.