Bevezetés a számításelméletbe 1.

7. gyakorlat, 2012. március 29. $16^{\underline{00}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`, `www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: I_n jelöli az $n \times n$ méretű *egységmátrixot*, amire $(I_n)_i^j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Áll.: $A \cdot I_n = A$ és $I_n \cdot B = B$ tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ill. $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixokra.

Def: A $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix az $A \in R^{n\times n}$ mátrix *balinverze*, ha $B \cdot A = I_n$, a $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig A *jobbinverze*, ha $A \cdot J = I_n$. Az A *inverze* olyan A^{-1} mátrix, ami egyszerre bal- és jobbinverze is A-nak.

Áll.: Ha A-nak létezik jobb- és balinverze, akkor azok egyenlők.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik jobbinverze, ha $\det A \neq 0$.

Köv.: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik balinverze, ha $\det A \neq 0$.

Áll.: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\det A \neq 0$, akkor $(A^{-1})_i^j = \frac{A_{j,i}}{|A|}$.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix inverze megkapható az $(A|I_n)$ mátrix RLA-ra hozásával: ha a RLA $(I_n|X)$ alakú, akkor X az inverz, ha nem, akkor $\det A = 0$ és A-nak nincs inverze.

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tetszőleges $n \times k$ méretű valós mátrix. Ekkor
$s(A) := \dim\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$, azaz A lin ftn sorainak max száma az A mátrix *sorrangja.*
$o(A) := \dim\langle A^1, A^2, \ldots, A^k\rangle$, azaz A lin ftn oszlopainak max száma az A mátrix *oszloprangja.*
$d(A) :=$ A legnagyobb nemnulla aldeterminánsának mérete az A mátrix *determinánsrangja.*

Megf.: Tetsz A valós mxra (1) $d(A) = d(A^T)$, (2) $o(A) = s(A^T)$, (3) ha A lépcsős alakú, akkor $s(A) = d(A)$.

Áll.: Elemi sorekvivalens átalakítás se a sorrangot, sem a determinánsrangot nem változtatja meg.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A)$.

Köv.: Tetszőleges A valós mátrixra $s(A) = d(A) = o(A)$, és ez az A mátrix $r(A)$ *rangja.*

Tétel: Tetszőleges A mátrix rangja megegyezik a Gauss-elimináció után kapott vezéregyesek számával.

Def: A valós vektorterek közötti $\mathcal{A} : U \to V$ leképezés *lineáris*, ha műveletterató, azaz
(1) additív: $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U$ ill. (2) homogén: $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda\mathcal{A}(u) \quad \forall\lambda \in T,\ \forall u \in U$.
Az $\mathcal{A} : U \to U$ lineáris leképezés neve *lineáris transzformáció.* Lineáris leképezésben a lineáris kombináció képe a képek lineáris kombinációja, azaz az (1) és (2) helyett megkövetelhető a
(3) $\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda\mathcal{A}(u) + \mu\mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in U, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tulajdonság, vagy az annál is erősebb „lineáris kombináció tartási" tulajdonság: (3') $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k) = \lambda_1\mathcal{A}(u_1) + \lambda_2\mathcal{A}(u_2) + \ldots + \lambda_k\mathcal{A}(u_k)$.

Állítás: A lineáris leképezést a báziselemeken felvett képek egyértelműen meghatározzák. Pontosabban: Ha U és V T feletti vt-k, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az U bázisa és $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tetszőleges, akkor pontosan egy $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés létezik, amire $\mathcal{A}(u_i) = v_i \quad \forall i$-re.

Def: Az $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés
képtere $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} := \{\mathcal{A}(u) : u \in U\}$ (mindazon V-beli vektorok, amelyek előállnak U-beli vektor képeként),
magtere pedig $\mathrm{Ker}\mathcal{A} := \{u \in U : \mathcal{A}(u) = (\mathbf{0})\}$ (mindazon U-beli vektorok, amik $\mathbf{0}$-ba képződnek).

Állítás: Ha $\mathcal{A} : U \to V$ lin. lekép., akkor $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \leq U$ és $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \leq V$, tehát a magtér és a képtér alterek.

Dimenziótétel: Ha $\mathcal{A} : U \to V$ lin. lekép., akkor $\dim \mathrm{Ker}\mathcal{A} + \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \dim U$.

Def: Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ az U, B_2 pedig a V bázisa. Az $\mathcal{A}$ *leképezés mátrixa* $[\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2}|[\mathcal{A}(u_2)]_{B_2}|\cdots|[\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az i-dik oszlop az i-dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai (mint helyvektorok) lineárisan összefüggő halmazt alkotnak. Határozzuk meg A determinánsát.
2. Legyen A olyan 33×33-as mátrix, melyre $A = -A^T$. Bizonyítsuk be, hogy A szinguláris, azaz nem invertálható.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix invertálható, és AB pedig egy (A-val nem feltétlenül azonos méretű) csupa0 mátrix , akkor B is csupa0 mátrix.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha az A $(n \times n)$-es invertálható mátrix minden eleme páros, akkor az A^{-1} mátrixnak legalább n eleme nem egész! (GyIV '04)
5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1} \cdot B^{-1}$ szorzatot! (pZH '07)
6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Legyen $X := A \cdot B^{-1}$ és $Y := B \cdot (A^{-1})^2$. Számítsuk ki az $X \cdot Y$ mátrix inverzét. (ppZH '07)
7. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B olyan 101×101 méretű mátrixok, hogy A invertálható és $(AB)^T = -BA$, akkor $\det B = 0$ áll!
8. Számolgassuk konkrét mátrixok rangjait.
9. Bizonyítsuk be, hogy ha M és N összeszorozható mátrixok, akkor $r(MN) \le \min\{r(M), r(N)\}$.
10. Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $r(B) < n$, akkor $r(AB) < n$ (ZH '04)
11. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor $r(A + B) \le r(A) + r(B)$. (ZH '02)
12. Legyen az A mátrixnak 100 oszlopa, jelölje B az A első 70 oszlopa által alkotott mátrixot, J az utolsó 70 oszlop, C pedig a középső 40 oszlop által meghatározott mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy $r(B) + r(J) \ge r(A) + r(C)$. (ZH '04)
13. Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < n$, akkor az AB mátrix szinguláris, azaz nem invertálható.
14. Határozzuk meg annak az $(n \times n)$-es mátrixnak a rangját, melynek az (i, j) pozícióban álló eleme $x_i x_j$ valamely rögzített $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esetén! (GyIV '04)
15. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy erre nem mindig elegendő az egy sorral bővítés.
16. Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$ méretű A mátrix rangja n, akkor A-nak van olyan eleme, amit alkalmas módon megváltoztatva a kapott mátrix rangja n-nél kisebb lesz.
17. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer tetszőleges (értelmes) b vektorra megoldható.
18. Tegyük fel, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix rangja k, ahol $k < m < n$. Határozzuk meg, legalább hány elemét kell A-nak megváltoztatni ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja a lehető legnagyobb legyen.
19. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges (u, v) vektor képe a) $\mathcal{A}(u, v) = (-u, 2v)$, b) $\mathcal{A}(u, v) = (uv, v)$, c) $\mathcal{A}(u, v) = (4, 3u)$ ill. d) $\mathcal{A}(u, v) = (u + v, 0)$?
20. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel $\mathcal{A}$ az $(5, 6)$ vektorhoz?
21. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ből V_2-be, valamint $v_1, \ldots, v_k \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ is generátorrendszer V_2-ben.
    b) Ha a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok függetlenek, akkor az $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok is függetlenek.
    c) Ha az $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok függetlenek, akkor a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok is függetlenek.