Bevezetés a számításelméletbe 1.

6. gyakorlat, 2012. március 14. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: Az A négyzetes mátrix i-dik sorának és j-dik oszlopának elhagyásával keletkező mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese az $A_{i,j}$ *előjeles aldetermináns*.

Kifejtési tétel: Ha A $n \times n$-es mátrix és i rögzített, akkor $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$ (*sor szerinti kifejtés*). Rögzített j-re $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$ (*oszlop szerinti kifejtés*). Ha $k \neq l$, akkor $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot A_{l,j} = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot A_{i,l}$ (*ferde kifejtés*).

Def: Ha A és B azonos méretű mátrixok, akkor $A+B$ értelmezett, és $(A+B)_i^j := A_i^j + B_i^j$. Ha az A mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora a B mátrixnak, akkor $A \cdot B$ értelmezett, és $(A \cdot B)_i^j := A_i \cdot B^j (= \sum_k A_i^k B_k^j)$. Ha A egy mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár, akkor $\lambda \cdot A$ a λ-val végigszorzott mátrix: $(\lambda A)_i^j = \lambda \cdot A_i^j$.

Áll.: Az alábbi azonosságok teljesülnek. (Ha az egyenlőségek valamelyikének egyik oldala értelmes, akkor a másik is az.) (1) $A+B = B+A$, (2) $A+(B+C) = (A+B)+C$, (3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ valamint (4) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ illetve $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Determinánsok szorzástétele: Ha A, B $n \times n$-es mátrixok, akkor $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Def: Az (α szöget bezáró) $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* az az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re is, velük jobbsodrású rendszert alkot, hossza pedig $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\alpha$ (azaz az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ feszítette parallelogramma területe).

Áll.: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzata az $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ determináns értéke, ahol $\underline{i}, \underline{j}$ és $\underline{k}$ a tér három koordinátatengelyének egységvektorai.

Def: Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vegyesszorzata* $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) := \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$.

Áll.: A vegyes szorzat értéke az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok feszítette parallelepipedon előjeles térfogata (akkor pozitív, ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsordású rendszert alkotnak). A vegyes szorzat értékét az $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ determináns adja meg. A vegyes szorzat felírható $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot c$ alakban is.

Megj.: A determináns szemléletes jelentése (magasabb dimenzióban is) a sorvektorok feszítette paralellepipedon (ill. parallelotop) előjeles térfogata.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai (mint helyvektorok) lineárisan összefüggő halmazt alkotnak. Határozzuk meg A determinánsát.
2. Legyenek $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinomok, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns értéke mindenképpen nulla. (V '00)
$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ & \vdots & & \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$
3. Mutassuk meg, hogy ha A olyan $n \times n$ méretű mátrix, amire $|A| \neq 0$, akkor A-nak van olyan $(n-1) \times (n-1)$ méretű A' részmátrixa, amire $|A'| \neq 0$. Igazoljuk, hogy minden $0 \leq k \leq n$ egészre az A mátrix bármely k sorából kiválasztható olyan $k \times k$ méretű A_k mátrixa, amire $|A_k| \neq 0$.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B olyan $n \times n$ méretű mátrixok, amikre az $A \cdot B$ mátrix első és utolsó sora megegyezik, akkor $|A| = 0$ vagy $|B| = 0$ teljesül.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix determinánsa létezik és nem 0, akkor van A-nak olyan eleme, amit megváltoztatva elérhető, hogy a determináns 0 legyen.
6. Legyen $A \in R^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű valós mátrix. Igaz-e, hogy ha $A^k = 0$ valamely $0 < k \in \mathbb{N}$-re, akkor $|A| = 0$? Igaz-e, hogy ha $|A| = 0$, akkor $A^k = 0$ valamely $0 < k \in \mathbb{N}$-re?
7. Legyen $A \in R^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű valós mátrix. Jelölje B azt a mátrixot, aminek i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns értéke. Határozzuk meg az AB szorzatot!

8. A 100×100-as A és B mátrixokra teljesül, hogy A minden sorában az elemek összege 1, a B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az AB szorzatot!
9. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B összeszorozható mátrixok, akkor $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
10. Legyen A és B mátrixok mindegyike $n \times k$ méretű. Bizonyítsuk be, hogy az $A \cdot B^T$ és az $A^T \cdot B$ mátrixok főátlóiban szereplő számok összege megegyezik.
11. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan $n \times n$ méretű A és B mátrixok, amire $AB - BA = I_n$ teljesül, ahol I_n az $n \times n$ méretű egységmátrix.
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.
13. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mely B mátrixokra lesz $AB = BA$? (ZH '01)
14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra teljesül, hogy $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$.
15. Tegyük fel, hogy ha az $n \times n$ méretű, valós A mátrixra $A^2 + A + I_n = 0$ teljesül, ahol I_n az $n \times n$ méretű egységmátrix. Határozzuk meg az A^{2010} hatványt!