Bevezetés a számításelméletbe 1.

6. gyakorlat, 2012. március 22. $16^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`, `www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: Az A négyzetes mátrix i-dik sorának és j-dik oszlopának elhagyásával keletkező mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese az $A_{i,j}$ *előjeles aldetermináns*.

Kifejtési tétel: Ha A $n \times n$-es mátrix és i rögzített, akkor $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$ (*sor szerinti kifejtés*). Rögzített j-re $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$ (*oszlop szerinti kifejtés*). Ha $k \neq l$, akkor $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot A_{l,j} = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot A_{i,l}$ (*ferde kifejtés*).

Def: Ha A és B azonos méretű mátrixok, akkor $A + B$ értelmezett, és $(A+B)_i^j := A_i^j + B_i^j$. Ha az A mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora a B mátrixnak, akkor $A \cdot B$ értelmezett, és $(A \cdot B)_i^j := A_i \cdot B^j (= \sum_k A_i^k B_k^j)$. Ha A egy mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár, akkor $\lambda \cdot A$ a λ-val végigszorzott mátrix: $(\lambda A)_i^j = \lambda \cdot A_i^j$.

Áll.: Az alábbi azonosságok teljesülnek. (Ha az egyenlőségek valamelyikének egyik oldala értelmes, akkor a másik is az.) (1) $A + B = B + A$, (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$, (3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ valamint (4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ illetve $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Determinánsok szorzástétele: Ha A, B $n \times n$-es mátrixok, akkor $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Def: Az (α szöget bezáró) $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* az az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, ami merőleges az $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re is, velük jobbsodrású rendszert alkot, hossza pedig $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\alpha$ (azaz az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ feszítette parallelogramma területe).

Áll.: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzata az $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ determináns értéke, ahol $\underline{i}, \underline{j}$ és $\underline{k}$ a tér három koordinátatengelyének egységvektorai.

Def: Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vegyesszorzata* $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) := \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$.

Áll.: A vegyes szorzat értéke az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok feszítette parallelepipedon előjeles térfogata (ami akkor pozitív, ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsordású rendszert alkotnak). A vegyes szorzat értékét az $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ determináns adja meg. A vegyes szorzat felírható $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot c$ alakban is.

Megj.: A determináns szemléletes jelentése (magasabb dimenzióban is) a sorvektorok feszítette paralellepipedon (ill. parallelotop) előjeles térfogata.

Def: I_n jelöli az $n \times n$ méretű *egységmátrixot*, amire $(I_n)_i^j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Áll.: $A \cdot I_n = A$ és $I_n \cdot B = B$ tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ill. $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixokra.

Def: A $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix az $A \in R^{n \times n}$ mátrix *balinverze*, ha $B \cdot A = I_n$, a $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig A *jobbinverze*, ha $A \cdot J = I_n$. Az A *inverze* olyan A^{-1} mátrix, ami egyszerre bal- és jobbinverze is A-nak.

Áll.: Ha A-nak létezik jobb- és balinverze, akkor azok egyenlők.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik jobbinverze, ha $\det A \neq 0$.

Köv.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik balinverze, ha $\det A \neq 0$.

Áll.: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\det A \neq 0$, akkor $(A^{-1})_i^j = \frac{A_{j,i}}{|A|}$.

Áll.: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverze megkapható az $(A|I_n)$ mátrix RLA-ra hozásával: ha a RLA $(I_n|X)$ alakú, akkor X az inverz, ha nem, akkor $\det A = 0$ és A-nak nincs inverze.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai (mint helyvektorok) lineárisan összefüggő halmazt alkotnak. Határozzuk meg A determinánsát.
2. Legyenek $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinomok, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns értéke mindenképpen nulla. (V '00)

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ \vdots & & & \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

3. Mutassuk meg, hogy ha A olyan $n \times n$ méretű mátrix, amire $|A| \neq 0$, akkor A-nak van olyan $(n-1) \times (n-1)$ méretű A' részmátrixa, amire $|A'| \neq 0$. Igazoljuk, hogy minden $0 \leq k \leq n$ egészre az A mátrix bármely k sorából kiválasztható olyan $k \times k$ méretű A_k mátrixa, amire $|A_k| \neq 0$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B olyan $n \times n$ méretű mátrixok, amikre az $A \cdot B$ mátrix első és utolsó sora megegyezik, akkor $|A| = 0$ vagy $|B| = 0$ teljesül.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix determinánsa létezik és nem 0, akkor van A-nak olyan eleme, amit megváltoztatva elérhető, hogy a determináns 0 legyen.
6. Legyen $A \in R^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű valós mátrix. Igaz-e, hogy ha $A^k = 0$ valamely $0 < k \in \mathbb{N}$-re, akkor $|A| = 0$? Igaz-e, hogy ha $|A| = 0$, akkor $A^k = 0$ valamely $0 < k \in \mathbb{N}$-re?
7. Legyen $A \in R^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű valós mátrix. Jelölje B azt a mátrixot, aminek i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns értéke. Határozzuk meg az AB szorzatot!
8. A 100×100-as A és B mátrixokra teljesül, hogy A minden sorában az elemek összege 1, a B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az AB szorzatot!
9. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B összeszorozható mátrixok, akkor $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
10. Legyen A és B mátrixok mindegyike $n \times k$ méretű. Bizonyítsuk be, hogy az $A \cdot B^T$ és az $A^T \cdot B$ mátrixok főátlóiban szereplő számok összege megegyezik.
11. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan $n \times n$ méretű A és B mátrixok, amire $AB - BA = I_n$ teljesül, ahol I_n az $n \times n$ méretű egységmátrix.
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.
13. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mely B mátrixokra lesz $AB = BA$? (ZH '01)
14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra teljesül, hogy $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$.
15. Tegyük fel, hogy ha az $n \times n$ méretű, valós A mátrixra $A^2 + A + I_n = 0$ teljesül, ahol I_n az $n \times n$ méretű egységmátrix. Határozzuk meg az A^{2010} hatványt!
16. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzeit!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 8 & 3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

17. Jelölje I'_n azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek a mellékátlójában 1-esek állnak, a többi mezőn pedig 0. Mi az I'_n és az $I_n + I'_n$ mátrixok inverze? Ha A egy $n \times n$ méretű mátrix, mik lesznek az $I'_n \cdot A$ és a $A \cdot I'_n$ mátrixok?
18. Legyen A olyan 33×33-as mátrix, melyre $A = -A^T$. Bizonyítsuk be, hogy A szinguláris, azaz nem invertálható.
19. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix invertálható, és AB pedig egy (A-val nem feltétlenül azonos méretű) csupa0 mátrix , akkor B is csupa0 mátrix.
20. Bizonyítsuk be, hogy ha az A $(n \times n)$-es invertálható mátrix minden eleme páros, akkor az A^{-1} mátrixnak legalább n eleme nem egész! (GyIV '04)
21. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1} \cdot B^{-1}$ szorzatot! (pZH '07)
22. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Legyen $X := A \cdot B^{-1}$ és $Y := B \cdot (A^{-1})^2$. Számítsuk ki az $X \cdot Y$ mátrix inverzét. (ppZH '07)
23. Döntsük el, invertálhtató-e az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, adjuk meg az inverzét. (ZH '05)

    Ugyanez a kérdés az $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 7 & -16 \\ -5 & 11 & -25 \end{pmatrix}$ mátrixokra. (pZH '05)
24. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B olyan 101×101 méretű mátrixok, hogy A invertálható és $(AB)^T = -BA$, akkor $\det B = 0$ áll!