Bevezetés a számításelméletbe 1.

5. gyakorlat, 2012. március 8. $16^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (négyzetes) mátrix *determinánsa*: $\det(A) := |A| := \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$.

Avagy: Az $n\times n$ táblázat n mezője *bástyaelhelyezést* alkot, ha minden sorban és minden oszlopban az n mezőből pontosan egy található. Az A determinánsa a bástyelhelyezésekhez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol egy szorzat előjele pontosan akkor negatív, ha az adott bástyaelhelyezésben az ÉK-DNy állású mezőpárok száma páratlan.

Def: A négyzetes A mátrix *főátlója* az A mátrix bal felső és jobb alsó sarkát összekötő átlóján álló mezők.

Az A mátrix *transzponáltja* az az A^T mátrix, amire $(A^T)_i^j = A_j^i\ \forall i,j$, azaz a főátlóra tükrözzük az A mátrixot.

A négyzetes A mátrix *(szigorú) felső háromszögmátrix*, ha főátlója alatt (és a főátlón is) csak 0-k állnak.

Tétel: Tetszőleges $n\times n$ méretű A mátrix teljesülnek az alábbiak. (1) $\det(A) = \det(A^T)$
(2) Ha A felső háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ az A főátlóbeli elemeinek szorzata.
(3) Ha A egy sora/oszlopa csupa-0, akkor $\det(A) = 0$.
(4) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-szoros lesz.
(5) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, a determináns (-1)-szeres lesz.
(6) Ha A két sora/oszlopa azonos, determinánsa 0.
(7) Ha A egy sorának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz, a determináns nem változik.

Gyakorlatok

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrixok $n\times n$-esek, a nem jelzett elemek értéke 0.
   (a) $a[i,i] = A$
   (b) $a[i,i] = a[i,i+1] = a[n,1] = 1, \quad n = 2k$
   (c) $a[i,j] = i+j-1$
   (d) $a[i,j] = (i+j-1)^2$
   (e) $a[i,j] = (i+j)^3$
   (f) $a[i,j] = \min(i,j)$
   (g) $a[i,j] = i-j$, n páratlan
   (h) $a[i,i] = 2, \quad a[i,j] = 1$
   (i) $a[i,i] = A, \quad a[i,j] = B$
   (j) $a[i,j] = |i-j|$
   (k) $a[i,j : i+j \le n+1] = a[n,n] = 1$
   (l) $a[i,i-1] = a[i,i+1] = 1, \quad a[i,i] = 2$
2. Megválasztható-e c értéke úgy, hogy az alábbi determináns ne 0 legyen?
$$\begin{vmatrix} c & c+1 & c+2 \\ c+3 & c+4 & c+5 \\ c+6 & c+7 & c+8 \end{vmatrix}$$
3. Igazoljuk, hogy ha az $n\times n$-es A mátrixnak minden eleme 1 vagy -1, akkor $\det A$ osztható 2^{n-1}-gyel! (V '00)
4. Egy $n\times n$-es mátrix minden eleme páros, determinánsa 64 többszöröse, de nem osztható 128-cal. Mi lehet n értéke? (ZH '99)
5. Számítsuk ki a determinánsát annak a 101×101 méretű A mátrixnak, amire $A_i^j = \begin{cases} \sin(i)\ln(j) & \text{ha } ij \text{ páros} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$
6. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen B az az $n\times n$-es mátrix, amiben a k-adik sor j-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j}a_{kj}$ $(1\le k,j\le n)$. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1? (ZH '00)
7. Az egyjegyű számokat tartalmazó $n\times n$-es mátrix minden sora n jegyű számként is olvasható, mely számok mindegyike osztható 2012-vel. Igaz-e, hogy a determináns is osztható 2012-vel?
8. Legyen A olyan 40×40 méretű mátrix, aminek a bal felső 18×23-as részmátrixában csupa 0 áll. Bizonyítsuk be, hogy $\det(A) = 0$.
9. Tegyük fel, hogy az $n\times n$ méretű A mátrix minden sorösszege 7. Igazoljuk, hogy ha A ötödik oszlopában mindenhova 1-t írunk, akkor a kapott A' mátrix determinánsa A deteminánsának hetedrésze lesz.

10. Milyen n esetén 0 az alábbi determináns értéke? (ZH '98)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ : & : & : & & : \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

11. Igazoljuk, hogy az alábbi determinánsok értéke nem 0. (ZH '98)

$$\begin{vmatrix} 1222 & 1492 & 1956 & 1789 \\ 1456 & 1000 & 1867 & 1686 \\ 1848 & 1945 & 1552 & 1640 \\ 1769 & 1514 & 1918 & 1812 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix}$$