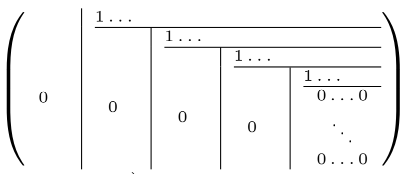
Bevezetés a számításelméletbe 1.

4. gyakorlat, 2012. február 29. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Lineáris egyenletrendszer	(kibővített) együtthatómátrix	lépcsős alak
$\begin{matrix} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n = b_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k,1}x_1 + \alpha_{k,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k,n}x_n = b_k \end{matrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \ldots & \alpha_{k,n} & b_k \end{array}\right)$	

Def: A fenti lineáris egyenletrendszer megoldása egy olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ szám n-es, amire az $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots\ x_n = s_n$ helyettesítés a rendszer minden egyenletét igazzá teszi.

Def: *Lépcsős alak:* Olyan mátrix, hogy (1) minden sor első nemnulla eleme egy *vezéregyes* ill. (2) bármely két vezéregyesre a lejjebb levő a felsőtől jobbra van.

Def: *Redukált lépcsős alak:* Olyan lépcsős alak, melyben a vezéregyesek felett is 0-k vannak.

Def: *Tilos sor:* A kib. egyhómx olyan sora, aminek első nemnulla eleme a sor végén áll.

Def: *Szabad paraméter:* A LA vezéregyest nem tartalmazó oszlopához tartozó ismeretlen.

Megf.: RLA-ban megadott lineáris egyenletrendszer megoldása egyszerű: a szabad paraméterek tetszőleges választása mellett egyértelműen adódnak a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenek értékei.

Def: *Elemi sorekvivalens átalakítások:* (1) két sor felcserélése, (2) valamely sor nemnullával való szorzása, (3) valamely sornak egy másik sorhoz való hozzáadása, ((4) valamely sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz), ill. ((5) egy csupa 0-sor elhagyása)

Megf.: ESÁ elvégzése után a megoldások halmaza nem változik.

Def: M^i az M mátrix i-dik oszlopa, M_j a j-dik sora, M^i_j pedig az i-dik sor j-dik eleme.

Az M mátrix Gauss-eliminációja

(Célja az M mátrix lépcsős alakra hozása.)

$\boxed{\text{I: } M^1 = \underline{0}}$ (a) M^1 elhagyása, (b) rekurzív hívás, (c) a kapott LA elé M^1 visszaíráasa.

$\boxed{\text{II: } M^1 \neq \underline{0}}$ (a) sorcserével $M^1_1 \neq 0$, (b) sorszorzással $M^1_1 = 1$, (c) M^1_1 alatti elemek kinullázása (d) M_1 és M^1 törlése (e) rekurzív hívás, (f) a kapott LA-hoz M^1 és M_1 visszaírása.

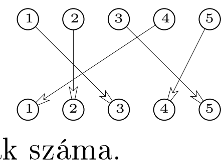
Tétel: A Gauss-elimináció ESÁ-k elvégzésevel tetszőleges M mátrixot LA-ra hoz. További ESÁ-kkal RLA kapható.

Tétel: A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a Gauss-elimináció után nincs tilos sor. A megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha sem tilos sor, sem szabad paraméter nincs az elimináció után.

Köv.: Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Def: $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. A $\sigma : [n] \to [n]$ kölcsönösen egyértelmű leképezés (bijekció) neve *permutáció.* A σ *permutáció inverze* az a σ^{-1} permutáció, amire $\sigma^{-1}(i) = j \iff \sigma(j) = i$. A k, l elemek *inverzióban állnak* σ szerint, ha k, l ill. $\sigma(k), \sigma(l)$ nagyságviszonya fordított. A σ permutáció $I(\sigma)$ *inverziószáma* a σ szerint inverzióban álló számpárok száma.

Pl: Egy $\pi : [5] \to [5]$ permutáció 3-féle megadása:
(1) függvényként $\pi(1) = 3, \pi(2) = 2, \pi(3) = 5, \pi(4) = 1, \pi(5) = 4$,
(2) táblázattal $\pi = \dfrac{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5}{3 \mid 2 \mid 5 \mid 1 \mid 4}$ ill. (3) nyíldiagrammal (az ábrán).



Megf.: (1) $I(\pi)$ a π nyíldiagramjában a nyilak metszéspontjainak száma.
(2) π^{-1} nyíldiagramja a π nyíldiagramjának vízszintes tengelyre vett tükörképe.

Köv.: Tetszőleges π permutációra $I(\pi) = I(\pi^{-1})$.

Gyakorlatok

1. Legyen $\alpha(i, j)$ az i és j számok minimuma. Mi a megoldása azon n egyenletből álló egyenletrenszernek, amelynek i-dik egyenlete $\alpha(i, 1)x_1 + \alpha(i, 2)x_2 + \ldots + \alpha(i, n)x_n = i$?

   Mi a helyzet akkor, ha az i-dik egyenlet $(i + 1)x_1 + (i + 2)x_2 + \ldots + (i + n)x_n = i^2$?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$\frac{x-1970}{30}+\frac{x-1972}{28}+\frac{x-1974}{26}+\frac{x-1976}{24}=\frac{x-30}{1970}+\frac{x-28}{1972}+\frac{x-26}{1974}+\frac{x-24}{1976}$$

3. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy egyértelműen megoldható. Az egyenletek jobb oldalán álló számokat alkalmas módon megváltoztatva elérhető-e, hogy az így kapott egyenletrendszernek (a) ne legyen megoldása ill. (b) végtelen sok megoldasa legyen?
4. Egy három ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer megoldásai tekinthetők a 3 dimenziós tér helyvektorainak. A megoldásoknak megfelelő helyvektorok milyen ponthalmazt alkothatnak?
5. Igaz-e, hogy ha egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszernek (amiben az egyenletek jobb oldalán álló konstansok is egészek) van megoldása a valósak körében, akkor a racionális számok körében is megoldható?
6. Oldjuk meg a Gauss-féle elimináció módszerével a következő lineáris egyenletrendszereket.

(b)
$$\begin{aligned} x+2y-z-u+v &= -1\\ x+2y-z+v &= 1\\ -x-y+z+3u-2v &= 2\\ 2x+2y-2z-5u+4v &= -2\\ 3x+7y-3z+u+2v &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 3 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{aligned} x+9y+2z-5u-3v &= 9\\ 2y+3u &= 5\\ -2x-4z+u+6v &= 3\\ 3x+5y+6z+6u-9v &= 8\\ 8y-6u &= 8 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} a+2b-3c+d+e &= 1\\ a-b+c-3d-2e &= -1\\ 2a+3b-2c+d+4e &= -1\\ a-2b+2c-d &= -1\\ -3a+b+c+2d+e &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 42\\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -42\\ -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & -42\\ 3 & 0 & 1 & -1 & 3 & 84\\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -84 \end{array}$$

7. (a) Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszer megoldásakor pontosan egy legyen a szabad paraméterek száma.

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 6\\ x-3y+2z &= 5\\ 4x-3y+pz &= q \end{aligned}$$

   (b) Most úgy válasszuk meg p és q értékét, hogy ne legyen megoldás.

   (c) Milyen eset van még?
8. Adjuk meg a p paraméter összes valós értékét, amire az $x+y+z=1$, $2x+y=3$, $5x+3y+pz=11$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van! (ZH '98)
9. Határozzuk meg a szabad paraméterek számát az alábbi egyenletrendszerek esetén!

(a)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 6\\ 2x+3y-z &= 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x+3y-2z &= 4\\ -3x-4{,}5y+3z &= -2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 6\\ 2x+3y-z &= 4\\ -x-y+2z &= 1 \end{aligned}$$

10. Igazoljuk, hogy minden $0\le k\le \binom{n}{2}$ értékre van az $\{1,2,\ldots,n\}$ számoknak olyan permutációja, amiben az inverziók száma pontosan k. (ZH '98)
11. Az $1,2,\ldots,n$ számok egy π permutációjára legyen $J(\pi)$ a $\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n)$ sorozatban inverzióban **nem** álló párok száma. Milyen n esetén létezik olyan π permutáció, melyre $I(\pi)=J(\pi)$? (ZH '99)