

# Bevezetés a számításelméletbe 1.

4. gyakorlat, 2012. március 1. 16<sup>15</sup>, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

## Tudnivalók

Lineáris egyenletrendszer	(kibővített) együtthatómátrix	lépcsős alak
$\begin{aligned} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \dots + \alpha_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{k,1}x_1 + \alpha_{k,2}x_2 + \dots + \alpha_{k,n}x_n &= b_k \end{aligned}$	$\left( \begin{array}{cccc c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} & b_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \dots & \alpha_{k,n} & b_k \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c c c c c} 1 \dots & & & & \\ \hline & 1 \dots & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \dots & \\ \hline & & 0 & 0 & \frac{1 \dots}{0 \dots 0} \\ \hline & & & & \vdots \\ & & & & 0 \dots 0 \end{array} \right)$

**Def:** A fenti lineáris egyenletrendszer megoldása egy olyan  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  szám  $n$ -es, amire az  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  helyettesítés a rendszer minden egyenletét igazgá teszi.

**Def:** *Lépcsős alak:* Olyan mátrix, hogy (1) minden sor első nemnulla eleme egy *vezéregyes* ill. (2) bármely két vezéregyesre a lejjebb levő a felsőtől jobbra van.

**Def:** *Redukált lépcsős alak:* Olyan lépcsős alak, melyben a vezéregyesek felett is 0-k vannak.

**Def:** *Tilos sor:* A kib. egyhóm  $x$  olyan sora, aminek első nemnulla eleme a sor végén áll.

**Def:** *Szabad paraméter:* A LA vezéregyest nem tartalmazó oszlopához tartozó ismeretlen.

**Megf.:** RLA-ban megadott lineáris egyenletrendszer megoldása egyszerű: a szabad paraméterek tetszőleges választása mellett egyértelműen adódnak a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenek értékei.

**Def:** *Elemi sorokvivalens átalakítások:* (1) két sor felcserélése, (2) valamely sor nemnullával való szorzása, (3) valamely sornak egy másik sorhoz való hozzáadása, ((4) valamely sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz), ill. ((5) egy csupa 0-sor elhagyása)

**Megf.:** ESÁ elvégzése után a megoldások halmaza nem változik.

**Def:**  $M^i$  az  $M$  mátrix  $i$ -dik oszlopa,  $M_j$  a  $j$ -dik sora,  $M_j^i$  pedig az  $i$ -dik sor  $j$ -dik eleme.

**Az  $M$  mátrix Gauss-eliminációja** (Célja az  $M$  mátrix lépcsős alakra hozása.)

I:  $M^1 = 0$  (a)  $M^1$  elhagyása, (b) rekurzív hívás, (c) a kapott LA elé  $M^1$  visszaírása.

II:  $M^1 \neq 0$  (a) sorcserével  $M_1^1 \neq 0$ , (b) sorszorzással  $M_1^1 = 1$ , (c)  $M_1^1$  alatti elemek kinullázása (d)  $M_1$  és  $M^1$  törlése (e) rekurzív hívás, (f) a kapott LA-hoz  $M^1$  és  $M_1$  visszaírása.

**Tétel:** A Gauss-elimináció ESÁ-k elvégzésevel tetszőleges  $M$  mátrixot LA-ra hoz. További ESÁ-kkal RLA kapható.

**Tétel:** A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a Gauss-elimináció után nincs tilos sor. A megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha sem tilos sor, sem szabad paraméter nincs az elimináció után.

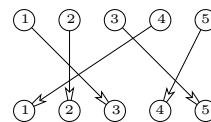
**Köv.:** Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

**Def:**  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ . A  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  kölcsönösen egyértelmű leképezés (bijekció) neve *permutáció*. A  $\sigma$  *permutáció inverze* az a  $\sigma^{-1}$  permutáció, amire  $\sigma^{-1}(i) = j \iff \sigma(j) = i$ . A  $k, l$  elemek *inverzióban állnak*  $\sigma$  szerint, ha  $k, l$  ill.  $\sigma(k), \sigma(l)$  nagyságviszonya fordított. A  $\sigma$  permutáció  $I(\sigma)$  *inverziószáma* a  $\sigma$  szerint inverzióban álló számpárok száma.

**P1:** Egy  $\pi : [5] \rightarrow [5]$  permutáció 3-féle megadása:

(1) függvényként  $\pi(1) = 3, \pi(2) = 2, \pi(3) = 5, \pi(4) = 1, \pi(5) = 4$ ,

(2) táblázattal  $\pi = \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{array}$  ill. (3) nyíldiagrammal (az ábrán).



**Megf.:** (1)  $I(\pi)$  a  $\pi$  nyíldiagramjában a nyilak metszéspontjainak száma.

(2)  $\pi^{-1}$  nyíldiagramja a  $\pi$  nyíldiagramjának vízszintes tengelyre vett tükörképe.

**Köv.:** Tetszőleges  $\pi$  permutációra  $I(\pi) = I(\pi^{-1})$ .

## Gyakorlatok

1. Legyen  $\alpha(i, j)$  az  $i$  és  $j$  számok minimuma. Mi a megoldása azon  $n$  egyenletből álló egyenletrendszernek, amelynek  $i$ -dik egyenlete  $\alpha(i, 1)x_1 + \alpha(i, 2)x_2 + \dots + \alpha(i, n)x_n = i$ ?

Mi a helyzet akkor, ha az  $i$ -dik egyenlet  $(i + 1)x_1 + (i + 2)x_2 + \dots + (i + n)x_n = i^2$ ?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$\frac{x-1970}{30} + \frac{x-1972}{28} + \frac{x-1974}{26} + \frac{x-1976}{24} = \frac{x-30}{1970} + \frac{x-28}{1972} + \frac{x-26}{1974} + \frac{x-24}{1976}$$

3. Egy lineáris egyenletrendszerrel tudjuk, hogy egyértelműen megoldható. Az egyenletek jobb oldalán álló számokat alkalmas módon megváltoztatva elérhető-e, hogy az így kapott egyenletrendszernek (a) ne legyen megoldása ill. (b) végtelen sok megoldása legyen?
4. Egy három ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer megoldásai tekinthetők a 3 dimenziós tér helyvektorainak. A megoldásoknak megfelelő helyvektorok milyen ponthalmazt alkothatnak?
5. Igaz-e, hogy ha egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszernek (amiben az egyenletek jobb oldalán álló konstansok is egészek) van megoldása a valósak körében, akkor a racionális számok körében is megoldható?
6. Oldjuk meg a Gauss-féle elimináció módszerével a következő lineáris egyenletrendszereket.

<p>(b)</p> $\begin{aligned} x + 2y - z - u + v &= -1 \\ x + 2y - z + v &= 1 \\ -x - y + z + 3u - 2v &= 2 \\ 2x + 2y - 2z - 5u + 4v &= -2 \\ 3x + 7y - 3z + u + 2v &= 2 \end{aligned}$	<p>(c)</p> $\begin{aligned} 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ 3 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ 2 \quad -1 \quad 3 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \end{aligned}$
---	---

<p>(d)</p> $\begin{aligned} x + 9y + 2z - 5u - 3v &= 9 \\ 2y + 3u &= 5 \\ -2x - 4z + u + 6v &= 3 \\ 3x + 5y + 6z + 6u - 9v &= 8 \\ 8y - 6u &= 8 \end{aligned}$	<p>(e)</p> $\begin{aligned} a + 2b - 3c + d + e &= 1 \\ a - b + c - 3d - 2e &= -1 \\ 2a + 3b - 2c + d + 4e &= -1 \\ a - 2b + 2c - d &= -1 \\ -3a + b + c + 2d + e &= 1 \end{aligned}$
--	---

(f)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 42 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -42 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & -42 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 3 & 84 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -84 \end{array}$$

7. (a) Adjuk meg  $p$  és  $q$  értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszer megoldásakor pontosan egy legyen a szabad paraméterek száma.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + pz &= q \end{aligned}$$

(b) Most úgy válasszuk meg  $p$  és  $q$  értékét, hogy ne legyen megoldás.

(c) Milyen eset van még?

8. Adjuk meg a  $p$  paraméter összes valós értékét, amire az  $x + y + z = 1$ ,  $2x + y = 3$ ,  $5x + 3y + pz = 11$  egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van! (ZH '98)
9. Határozzuk meg a szabad paraméterek számát az alábbi egyenletrendszerek esetén!

<p>(a)</p> $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$	<p>(b)</p> $\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 4 \\ -3x - 4,5y + 3z &= -2 \end{aligned}$	<p>(c)</p> $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ -x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$
---	---	---

10. Igazoljuk, hogy minden  $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$  értékre van az  $\{1, 2, \dots, n\}$  számoknak olyan permutációja, amiben az inverziók száma pontosan  $k$ . (ZH '98)

11. Az  $1, 2, \dots, n$  számok egy  $\pi$  permutációjára legyen  $J(\pi)$  a  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$  sorozatban inverzióban **nem** álló párok száma. Milyen  $n$  esetén létezik olyan  $\pi$  permutáció, melyre  $I(\pi) = J(\pi)$ ? (ZH '99)