

Bevezetés a számításelméletbe 1.

3. gyakorlat, 2012. február 22. 8²⁰, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ lineáris kombináció *triviális*, ha $\lambda_i = 0$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Def: A V vektortér F részhalmaza (*lineárisan*) *független*, ha F -belieknek csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\mathbf{0}$ -t. Azaz pl $F = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$. A fenti rendszer (*lineárisan*) *összefüggő*, ha nem lin.ftn, azaz a $\mathbf{0}$ előáll nemtriv. lin. komb.-ként: $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0}$, és $\lambda_i \neq 0$ valamely i -re.

Áll.: Az $F \subseteq V$ vektorhalmaz pontosan akkor lin ftm, ha egyetlen F -beli sem áll elő a többi vektorból lin komb.-ként.

Def: A b_1, b_2, \dots, b_n vektorrendszer a V vektortér *bázisa*, ha lin. ftm. és generálja V -t.

Tétel: Ha b_1, b_2, \dots, b_n pontosan akkor a V bázisa, ha $\forall v \in V$ egyértelműen áll elő a b_i -k lin. komb.jaként.

Def: Ha $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a V vektortér bázisa, és $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, akkor az u vektor B *bázis szerinti*

koordinátavektora az $[u]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ oszlopvektor.

Megf.: A koordinátavektorokkal pontosan úgy kell számolni, mint az oszlopvektorokkal, azaz $[u + v]_B = [u]_B + [v]_B$ ill. $[\lambda u]_B = \lambda [u]_B$ teljesül tetsz $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Def: A V vektortér $\dim(V)$ *dimenziója* a V egy tetszőleges bázisának elemszáma.

Kicserélési tétel: Ha $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subseteq V$ lin ftm és $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq V$ generálja V -t, akkor $\forall f_i \in F \exists g_j \in G : F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\}$ lin ftm.

Köv.: Ha l_1, l_2, \dots, l_n lin. ftm. és g_1, g_2, \dots, g_k generálja V -t, akkor $n \leq k$.

Köv.: Vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú, így a dimenzió fogalma jóldefiniált.

Gyakorlatok

- (a) Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy valós vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$?
(b) Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy valós vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?
- Legyenek \underline{u} és \underline{v} egy valós vektortér független elemei, és legyenek a, b, c, d valós számok. Mi a feltétele annak, hogy az $a\underline{u} + b\underline{v}$ és a $c\underline{u} + d\underline{v}$ vektorok is függetlenek legyenek?
- Egy valós vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok is, a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \rangle \cap \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_l \rangle = \{\underline{0}\}$, (vagyis a két generált altér metszete csak a nullvektorból áll), akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!
- Legyenek egy valós vektortér v_1, v_2, \dots, v_n vektorai lineárisan függetlenek. A c paraméter mely értékeire lesz a $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_n - cv_1$ vektorrendszer lineárisan független? (ZH '98)
- Bizonyítsuk be, hogy ha a V valós vektortérben az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k\}$ egy lineárisan független rendszer és a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{k+1}\}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V -ben.
- Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ egy valós vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!
- Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független vektorok és λ skalár egy valós vektortérben. Elkészítjük az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - \underline{c}, \underline{b} - \lambda \underline{c}$ vektorokat. Határozzuk meg, hogy a λ skalár mely értékei mellett lesz ez utóbbi három vektor lineárisan független és melyeknél összefüggő.
- A V vektortér két alterének, V_1 -nek és V_2 -nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(V_1) + \dim(V_2) \leq \dim(V)$. (ZH '99)
- Legyen a V térnek $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ egy bázisa. Tekintsük a következő n vektort:

$$\begin{aligned} b_i &:= a_i + a_{i+2} && \text{ha } i = 1, 2, \dots, n-2 \\ b_{n-1} &:= a_{n-1} + a_1 \\ b_n &:= a_n + a_2 \end{aligned}$$

(a) $n = 3$ esetén bázist alkotnak-e a vektorok?

(b) $n = 4$ esetén bázist alkotnak-e?

(Szorgalmi feladat: általában n -re bázist alkotnak-e ?)

(ZH '00)

10. Igaz-e, hogy minden véges dimenziós vektortérnek véges sok altere van?

(ZH '01)

11. Legyenek S_1 és S_2 az n dimenziós valós tér olyan alterei, melyekre minden $x \in S_1$ és $y \in S_2$ esetén teljesül, hogy x és y lineárisan független (feltételezve, hogy egyikük sem egyenlő a $\mathbf{0}$ vektorral). Legyenek $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \in S_1$ lineárisan független vektorok és $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)} \in S_2$ szintén lineárisan független vektorok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összesen $(k + m)$ vektort tartalmazó, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}$ vektorokból álló vektorrendszer is lineárisan független.

(ZH '01)

12. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb n -edfokú polinomok lineáris terében bázist alkotnak az

$$1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3, \dots, (x - 1)^n$$

polinomok.

(V '99)

13. A valós számok feletti V vektortérnek b_1, b_2, \dots, b_n egy bázisa. Legyen

$$v_1 := \alpha b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n,$$

$$v_2 := b_1 + \alpha b_2 + b_3 + \dots + b_n,$$

$$\vdots$$

$$v_n := b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + \alpha b_n.$$

Az α paraméter milyen értékeire lesz v_1, v_2, \dots, v_n szintén a V vektortér bázisa?

(V '00)

14. Tegyük fel, hogy v_1, v_2, \dots, v_n egy lineáris tér valamely bázisa. Igaz-e, hogy bázist alkotnak az alábbi vektorok is?

$$v_1 - 2v_2 + v_3, v_2 - 2v_3 + v_4, \dots, v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}, \dots, v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n, v_{n-1} - 2v_n + v_1, v_n - 2v_1 + v_2$$

(V '00)