# Bevezetés a számításelméletbe 1.

3. gyakorlat, 2012. február 23. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/˜fleiner/bszgyak)

## Tudnivalók

**Def:** A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ lineáris kombináció *triviális*, ha $\lambda_i = 0$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

**Def:** A $V$ vektortér $F$ részhalmaza *(lineárisan) független*, ha $F$-belieknek csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\mathbf{0}$-t. Azaz pl $F = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ esetén $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$. A fenti rendszer *(lineárisan) összefüggő*, ha nem lin.ftn, azaz a $\mathbf{0}$ előáll nemtriv. lin. komb.-ként: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$, és $\lambda_i \neq 0$ valamely $i$-re.

**Áll.:** Az $F \subseteq V$ vektorhalmaz pontosan akkor lin ftn, ha egyetlen $F$-beli sem áll elő a többi vektorból lin komb-ként.

**Def:** A $b_1, b_2, \ldots b_n$ vektorrendszer a $V$ vektortér *bázisa*, ha lin. ftn. és generálja $V$-t.

**Tétel:** Ha $b_1 b_2, \ldots b_n$ pontosan akkor a $V$ bázisa, ha $\forall v \in V$ egyértelműen áll elő a $b_i$-k lin. komb.jaként.

**Def:** Ha $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ a $V$ vektortér bázisa, és $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, akkor az $u$ vektor $B$ *bázis szerinti kooridinátavektora* az $[u]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ oszlopvektor.

**Megf.:** A koordinátavektorokkal pontosan úgy kell számolni, mint az oszlopvektorokkal, azaz $[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$ ill. $[\lambda u]_B = \lambda [u]_B$ teljesül tetsz $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

**Def:** A $V$ vektortér $\dim(V)$ *dimenziója* a $V$ egy tetszőleges bázisának elemszáma.

**Kicserélési tétel:** Ha $F = \{f_1, f_2 \ldots, f_n\} \subseteq V$ lin ftn és $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq V$ generálja $V$-t, akkor $\forall f_i \in F \;\; \exists g_j \in G : \;\; F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\}$ lin ftn.

**Köv.:** Ha $l_1 l_2, \ldots l_n$ lin. ftn. és $g_1 g_2, \ldots g_k$ generálja $V$-t, akkor $n \leq k$.

**Köv.:** Vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú, így a dimenzió fogalma jóldefiniált.

## Gyakorlatok

1. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy valós vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$?
   (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy valós vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?
2. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy valós vektortér független elemei, és legyenek $a$, $b$, $c$, $d$ valós számok. Mi a feltétele annak, hogy az $a\underline{u} + b\underline{v}$ és a $c\underline{u} + d\underline{v}$ vektorok is függetlenek legyenek?
3. Egy valós vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok is, a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle \cap \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l \rangle = \{\underline{0}\}$, (vagyis a két generált altér metszete csak a nullvektorból áll), akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!
4. Legyenek egy valós vektortér $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorai lineárisan függetlenek. A $c$ paraméter mely értékeire lesz a $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_n - cv_1$ vektorrendszer lineárisan független? (ZH '98)
5. Bizonyítsuk be, hogy ha a $V$ valós vektortérben az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k\}$ egy lineárisan független rendszer és a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}\}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot $V$-ben.
6. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy valós vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!
7. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorok és $\lambda$ skalár egy valós vektortérben. Elkészítjük az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}$, $\underline{b}-\lambda\underline{c}$ vektorokat. Határozzuk meg, hogy a $\lambda$ skalár mely értékei mellett lesz ez utóbbi három vektor lineárisan független és melyeknél összefüggő.
8. A $V$ vektortér két alterének, $V_1$-nek és $V_2$-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(V_1) + \dim(V_2) \leq \dim(V)$. (ZH '99)
9. Legyen a $V$ térnek $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy bázisa. Tekintsük a következő $n$ vektort:

$$\begin{aligned} b_i &:= a_i + a_{i+2} \qquad \text{ha } i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ b_{n-1} &:= a_{n-1} + a_1 \\ b_n &:= a_n + a_2 \end{aligned}$$

(a) $n = 3$ esetén bázist alkotnak-e a vektorok?
(b) $n = 4$ esetén bázist alkotnak-e?
(Szorgalmi feladat: általában $n$-re bázist alkotnak-e ? ) (ZH '00)

10. Igaz-e, hogy minden véges dimenziós vektortérnek véges sok altere van? (ZH '01)
11. Legyenek $S_1$ és $S_2$ az $n$ dimenziós valós tér olyan alterei, melyekre minden $x \in S_1$ és $y \in S_2$ esetén teljesül, hogy $x$ és $y$ lineárisan független (feltételezve, hogy egyikük sem egyenlő a $\mathbf{0}$ vektorral). Legyenek $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \in S_1$ lineárisan független vektorok és $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)} \in S_2$ szintén lineárisan független vektorok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összesen $(k+m)$ vektort tartalmazó, $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}$ vektorokból álló vektorrendszer is lineárisan független. (ZH '01)
12. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb $n$-edfokú polinomok lineáris terében bázist alkotnak az

$$1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, \ldots, (x-1)^n$$

polinomok. (V '99)

13. A valós számok feletti $V$ vektortérnek $b_1, b_2, \ldots, b_n$ egy bázisa. Legyen

$$\begin{aligned} v_1 &:= \alpha b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n \ , \\ v_2 &:= b_1 + \alpha b_2 + b_3 + \ldots b_n \ , \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ v_n &:= b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + \alpha b_n \ . \end{aligned}$$

Az $\alpha$ paraméter milyen értékeire lesz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ szintén a $V$ vektortér bázisa? (V '00)

14. Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy lineáris tér valamely bázisa. Igaz-e, hogy bázist alkotnak az alábbi vektorok is?
$v_1 - 2v_2 + v_3,\ v_2 - 2v_3 + v_4,\ \ldots,\ v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1},\ \ldots,\ v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n,\ v_{n-1} - 2v_n + v_1,\ v_n - 2v_1 + v_2$
(V '00)