Bevezetés a számításelméletbe 1.

2. gyakorlat, 2012. február 15. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: A V nemüres halmaz *valós vektortér*, ha (Ö) V-n értelmezett a $+$ művelet és $\forall u, v, w \in V$ esetén (ö1) $u + (v + w) = (u + v) + w$, (ö2) $u + v = v + u$, (ö3) $\exists\, \mathbf{0} \in V$: $u + \mathbf{0} = u$, (ö4) $\exists\, -u \in V$: $u + (-u) = \mathbf{0}$.
(Sz) A valósak és a V-beli vektorok között értelmezett egy $\cdot$ művelet, melyre teljesül, hogy $\forall \lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$
(sz1) $(\lambda + \kappa)u = \lambda u + \kappa u$, (sz2) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, (sz3) $(\lambda\kappa)u = \lambda(\kappa u)$, (sz4) $1u = u$.

Pl: Síkbeli/térbeli helyvektorok, oszlopvektorok, valós polinomok, valós függvények.

Tétel: Ha V valós vektortér, akkor (1) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\forall \lambda \in T$ (2) $0v = \mathbf{0}$ $\forall v \in V$ (3) $(-1)v = -v$ $\forall v \in V$ (4) $\lambda v = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda = 0$ vagy $v = \mathbf{0})$.

Def: A V valós vektortér W részhalmaza V vektortér *altere*, ha W is valós vektortér ugyanazokra a műveletekre, mint V. Jelölése: $W \leq V$.

Tétel: Ha V egy valós vektortér, akkor $W \subseteq V$ pontosan akkor altere V-nek, ha zárt a $+, \cdot$ műveletekre.

Def: A V valós vektortér $v_1, v_2, \ldots v_n$ vektorainak *lineáris kombinációján* egy $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ vektorösszeget értünk, ahol $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$. A $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ lin. komb. *triviális*, ha $\forall \lambda_i = 0$.

Def: A V vektortér U részhalmaza *generálja* $v \in V$-t, ha v előáll U-beli vektorok lineáris kombinációjaként. Az U által generált vektorok halmazát $\langle U \rangle$ jelöli. Az U a V vektortér *generátorrendszere*, ha $U \subseteq V$ és $\langle U \rangle = V$.

Tétel: Tetszőleges U vektorrendszer által generált vektorok alteret alkotnak, azaz $\langle U \rangle \leq V$.

Gyakorlatok

1. (a) Valós vektorteret alkotnak-e az egész számok?
   (b) Valós vektorteret alkotnak-e a differenciálható valós függvények?
   (c) Valós vektorteret alkot-e $\mathbb{Q}$ a szokásos összeadással és a $\lambda \odot r := \lfloor \lambda \cdot r \rfloor$ szorzással?
   (d) Valós vektorteret alkotnak-e a pozitív valós számok a $u \oplus v := u \cdot v$ és $\lambda \odot v := v^\lambda$ műveletekkel?
   (e) A 3-dimenziós tér két origón átmenő síkjának összege a két síkra merőleges, origón átmenő sík. Egy S sík λ-szorosán magát S-t értjük. Valós vektorteret alkotnak-e az origón átmenő síkok ezekkel a műveletkekkel?
   (f) Valós vektorteret alkotnak-e a sík részhalmazai a valósak felett, ha két részhalmaz összegét az uniójuk, egy részhalmaz λ-szorosa pedig az origóból λ arányú hasonlósággal kapott képe?
   (g) Valós vektorteret alkot-e az azonosan 0 függvény azokkal a folytonos függvényekkel együtt, amelyek nem polinomok?
   (h) Vektorteret alkotnak-e a sík helyvektorai az $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u}$ összeadásra és a szokásos skalárral való szorzásra?
   (i) Vektorteret alkotnak-e a síkbeli helyvektorok a szokásos összeadásra és a $\lambda \odot \underline{u} = \underline{0}$ skalárral való szorzásra?
2. Igazoljuk, hogy a vektorösszeg felcserélhetőségét kimondó (ö2) axióma következik a többi vektortéraxiómából, így azt nem szükséges sem feltenni, sem ellenőrizni a vektortérstruktúra bizonyításához.
   (Ötlet: vizsgáljuk az $(1 + 1)(u + v)$ kifejezést!)
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A}$ a V valós vektortér altereinek egy halmaza, akkor $\cap\mathcal{A} := \bigcap_{U \in A} U \leq V$, azaz tetszőlegesen sok altér metszete is altér.
4. Alteret alkotnak-e a 4 magasságú oszlopvektorok terében az alábbi részhalmazok?
   $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$, $V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$, $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 \geq 0 \right\}$
5. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok elemei, V pedig altere egy véges dimenziós, valós vektortérnek, továbbá $\underline{a} + \underline{b} \in V$, $\underline{c} + 3\underline{a} \in V$, de $\underline{b} + 2\underline{c} \notin V$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \in V$, és $5\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \notin V$.
6. (a) Igaz-e, hogy $\langle (1, 2, 3), (5, 6, 7) \rangle = \langle (1, 2, 3), (5; 6; 7), (6, 8, 10) \rangle$?
   (b) Igazoljuk, hogy tetszőleges V vektortérre ha $a, b, c \in V$, akkor $\langle a, b, c \rangle = \langle a + b, a + c, b + c \rangle$ teljesül.
7. Igazoljuk, hogy a háromdimenziós valós térnek $V = \{(x, y, z) : 3x + 2y + z = 0\}$ altere. Adjunk meg minél kevesebb vektort a térből amiknek a generátuma V.