Bevezetés a számításelméletbe 1.

2. gyakorlat, 2012. február 16. $16^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: A V nemüres halmaz *valós vektortér*, ha (Ö) V-n értelmezett a $+$ művelet és $\forall u,v,w\in V$ esetén (ö1) $u+(v+w)=(u+v)+w$, (ö2) $u+v=v+u$, (ö3) $\exists\ \mathbf{0}\in V$: $u+\mathbf{0}=u$, (ö4) $\exists\ -u\in V$: $u+(-u)=\mathbf{0}$.
(Sz) A valósak és a V-beli vektorok között értelmezett egy $\cdot$ művelet, melyre teljesül, hogy $\forall\lambda,\kappa\in\mathbb{R}$, $\forall u,v\in V$ (sz1) $(\lambda+\kappa)u=\lambda u+\kappa u$, (sz2) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$, (sz3) $(\lambda\kappa)u=\lambda(\kappa u)$, (sz4) $1u=u$.

Pl: Síkbeli/térbeli helyvektorok, oszlopvektorok, valós polinomok, valós függvények.

Tétel: Ha V valós vektortér, akkor (1) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}\quad\forall\lambda\in T$ (2) $0v=\mathbf{0}\quad\forall v\in V$ (3) $(-1)v=-v\quad\forall v\in V$ (4) $\lambda v=\mathbf{0}\Rightarrow(\lambda=0$ vagy $v=\mathbf{0})$.

Def: A V valós vektortér W részhalmaza V vektortér *altere*, ha W is valós vektortér ugyanazokra a műveletekre, mint V. Jelölése: $W\leq V$.

Tétel: Ha V egy valós vektortér, akkor $W\subseteq V$ pontosan akkor altere V-nek, ha zárt a $+,\cdot$ műveletekre.

Def: A V valós vektortér $v_1,v_2,\dots v_n$ vektorainak *lineáris kombinációján* egy $\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n$ vektorösszeget értünk, ahol $\forall\lambda_i\in\mathbb{R}$. A $\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i$ lin. komb. *triviális*, ha $\forall\lambda_i=0$.

Def: A V vektortér U részhalmaza *generálja* $v\in V$-t, ha v előáll U-beli vektorok lineáris kombinációjaként. Az U által generált vektorok halmazát $\langle U\rangle$ jelöli. Az U a V vektortér *generátorrendszere*, ha $U\subseteq V$ és $\langle U\rangle=V$.

Tétel: Tetszőleges U vektorrendszer által generált vektorok alteret alkotnak, azaz $\langle U\rangle\leq V$.

Gyakorlatok

1. (a) Valós vektorteret alkotnak-e az egész számok?
   (b) Valós vektorteret alkotnak-e a differenciálható valós függvények?
   (c) Valós vektorteret alkot-e $\mathbb{Q}$ a szokásos összeadással és a $\lambda\odot r:=\lfloor\lambda\cdot r\rfloor$ szorzással?
   (d) Valós vektorteret alkotnak-e a pozitív valós számok a $u\oplus v:=u\cdot v$ és $\lambda\odot v:=v^\lambda$ műveletekkel?
   (e) A 3-dimenziós tér két origón átmenő síkjának összege a két síkra merőleges, origón átmenő sík. Egy S sík λ-szorosán magát S-t értjük. Valós vektorteret alkotnak-e az origón átmenő síkok ezekkel a műveletkekkel?
   (f) Valós vektorteret alkotnak-e a sík részhalmazai a valósak felett, ha két részhalmaz összegét az uniójuk, egy részhalmaz λ-szorosa pedig az origóból λ arányú hasonlósággal kapott képe?
   (g) Valós vektorteret alkot-e az azonosan 0 függvény azokkal a folytonos függvényekkel együtt, amelyek nem polinomok?
   (h) Vektorteret alkotnak-e a sík helyvektorai az $\underline{u}\oplus\underline{v}=\underline{u}$ összeadásra és a szokásos skalárral való szorzásra?
   (i) Vektorteret alkotnak-e a síkbeli helyvektorok a szokásos összeadásra és a $\lambda\odot\underline{u}=\underline{0}$ skalárral való szorzásra?
2. Igazoljuk, hogy a vektorösszeg felcserélhetőségét kimondó (ö2) axióma következik a többi vektortéraxiómából, így azt nem szükséges sem feltenni, sem ellenőrizni a vektortérstruktúra bizonyításához.
   (Ötlet: vizsgáljuk az $(1+1)(u+v)$ kifejezést!)
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A}$ a V valós vektortér altereinek egy halmaza, akkor $\cap\mathcal{A}:=\bigcap_{U\in A}U\leq V$, azaz tetszőlegesen sok altér metszete is altér.
4. Alteret alkotnak-e a 4 magasságú oszlopvektorok terében az alábbi részhalmazok?
   $U:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}:x_3=0\right\}$, $V:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}:x_2=1\right\}$, $W:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}:x_1+x_3\geq 0\right\}$
5. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok elemei, V pedig altere egy véges dimenziós, valós vektortérnek, továbbá $\underline{a}+\underline{b}\in V$, $\underline{c}+3\underline{a}\in V$, de $\underline{b}+2\underline{c}\notin V$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c}\in V$, és $5\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c}\notin V$.
6. (a) Igaz-e, hogy $\langle(1,2,3),(5,6,7)\rangle=\langle(1,2,3),(5;6;7),(6,8,10)\rangle$?
   (b) Igazoljuk, hogy tetszőleges V vektortérre ha $a,b,c\in V$, akkor $\langle a,b,c\rangle=\langle a+b,a+c,b+c\rangle$ teljesül.
7. Igazoljuk, hogy a háromdimenziós valós térnek $V=\{(x,y,z):3x+2y+z=0\}$ altere. Adjunk meg minél kevesebb vektort a térből amiknek a generátuma V.