Bevezetés a számításelméletbe 1.

1. gyakorlat, 2012. február 8. $8^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: Adott Descartes-féle koordinátarendszer esetén a 3-dimenziós tér pontjait a valós számhármasokkal azonosíthatjuk. Egy számhármas jelentheti az origóból az adott pontba mutató irányított szakaszt is. Ha S egy sík a 3-dimenziós térben, akkor $\underline{n}$ az S *normálvektora*, ha $\underline{n}$ merőleges S minden egyenesére. Az e egyenesnek $\underline{v} \neq \mathbf{0}$ *irányvektora*, ha $\underline{v}$ párhuzamos e-vel.

Megf.: Az (a, b, c) koordinátájú irányított szakasz hossza $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Megf.: Az (a, b, c) és (a', b', c') irányított szakaszok pontosan akkor merőlegesek, ha $aa' + bb' + cc' = 0$.

Áll.: A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő, $\underline{n} = (a, b, c)$ normálvektorú S sík *normálvektoros egyenlete* $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$. (Pontosan azok a $Q(x, y, z)$ pontok elemei S-nek, amikre igaz a fenti egyenlet.)

Áll.: A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ irányvektorú e egyenes *paraméteres egyenletrendszere* $x = x_0 + \lambda v_1$, $y = y_0 + \lambda v_2$, $z = z_0 + \lambda v_3$. (Pontosan azok a $Q(x, y, z)$ koordinátájú pontok elemei e-nek, amire alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$-re fennállnak a fenti egyenlőségek.) A λ paramétertől (annak kifejezésével vagy $v_i = 0$ esetén az elhagyásával) megszabadulva a sík *irányvektoros egyenletrendszerét* kapjuk:
$v_1v_2v_3 \neq 0$ esetén $\frac{x-x_0}{v1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$, ha $v_1v_2 \neq 0 = v_3$ akkor $\frac{x-x_0}{v1} = \frac{y-y_0}{v_2}, z = v_3$, valamint $v_1 \neq 0 = v_2 = v_3$-ra $y = v_2, z = v_3$ az egyenletrendszer.

Def: Az *(n magas) oszlopvektor* egy n valós számból álló számoszlopot jelent, az egyes oszlopbeli számok az adott oszlopvektor *koordinátái*. Oszlopvektorokat összeadhatunk és kivonhatunk (koordinátánként) ill. valós számmal szorozhatunk (szintén koordinátánként). Egy $\underline{v}$ oszlopvektor ***kifejezhető*** a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ oszlopvektorokból, ha $\underline{v}$ előállítható az utóbbi vektorokból a fenti műveletek segítségével.

Megf.: Ha az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k$ oszlopvektorok mindegyike kifejezhető a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ oszlopvektorokból és $\underline{w}$ kifejezhető az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k$ oszlopvektorokból, akkor $\underline{w}$ kifejezhető a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ oszlopvektorokból is.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg a $P(2, 3, 4)$ és $Q(-1, 3, -5)$ pontok távolságát.
   A z mely értékei mellett merőleges az $(5, -3, 2)$ és a $(7, 4, z)$ vektor egymásra? Milyen z paraméter esetén lesz párhuzamos e két vektor?
   Legyen $\underline{a} = (2, -2, 1)$ és $\underline{b} = (2, 3, 4)$. Bontsuk fel $\underline{b}$-t egy $\underline{a}$-val párhuzamos és egy $\underline{a}$-ra merőleges összetevőre.
2. Írjuk fel a $(3, 4, 5)$ ponton átmenő, a $3x + y - 3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.
3. Írjuk fel a $(12, -1, 9)$ ponton átmenő és az $x = 3 + 7t, \quad y = -8 + 5t, \quad z = -t$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét. Állítsuk elő az egyenest két sík metszeteként is, azaz adjuk meg az irányvektoros egyenletrendszert.
4. Írjuk fel a $P(0, 0, 1), Q(1, -1, 0)$ és $R(1, 1, 1)$ pontokon átmenő sík egyenletét. Határozzuk meg a PQ felezőpontján és R-n átmenő egyenes egyenletrendszerét.
5. Írjuk fel annak az S síknak az egyenletét, ami átmegy a $P(1, 4, -1)$ ponton és merőleges az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerrel leírt egyenesre.
   Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, ami átmegy a $Q(2, -5, -2)$ ponton és merőleges a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra!
6. Tekintsük az $A(2, 2, 3)$ és $B(5, -1, 3)$ pontokat és az $\frac{x-4}{3} = \frac{4-y}{2} = z - 7$ egyenletrendszerű e egyenest. Határoozzuk meg e-nek azt a P pontját (ha van ilyen), amire $|AP| = |BP|$ teljesül.
7. Adjuk meg a p paraméter összes valós értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot! (ZH '98)
8. (a) Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy a $2x + 3y - z = 6$, $x - 3y + 2z = 5$ és $4x - 3y + pz = q$ egyenletű síkok egy egyenesre illeszkedjenek.
   (b) Most úgy válasszuk meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk.
   (c) Milyen eset van még?
9. Mi az alábbi síkok metszete?
   (a) $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 4 \\ -3x - 4{,}5y + 3z &= -2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ -x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$
10. Létezik-e olyan egyenes, amely a $2x + 4y + 3z = 1$, $x + 7y + 4z3$, ill. $3x - 5y - z = 2$ egyenletű síkok mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt.
11. Tekintsük az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oszlopvektorokat. Kifejezhető-e ezekből az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oszlopvektorok valamelyike?
    Ugyanez a kérdés az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ill. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oszlopvektorokból.
12. Igaz-e, hogy ha a $\underline{w}$ oszlopvektor kifejezhető az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots \underline{u}_k$ oszlopvektorokból, de ezek egyike sem fejezhető ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_n$ oszlopvektorokból, akkor $\underline{w}$ sem fejezhető ki a $\underline{v}_i$ vektorokból?
    Lehetséges-e, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots \underline{u}_k$ oszlopvektorok közül kizárólag $\underline{u}_1$ fejezhető ki a többiből?