# Bevezetés a számításelméletbe 1.

14. gyakorlat, 2012. május 9. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

## Tudnivalók

**Def:** A $G$ gráf *összefüggő (öf)*, ha bármely két pontja között vezet séta.

**Def:** A véges egyszerű $G$ gráf *fa*, ha $G$ összefüggő és körmentes.

**Áll.:** Ha az $F$ fának $n$ csúcsa van, akkor éleinek száma $|E(F)| = n-1$.

**Áll.:** A véges, egyszerű $G$ gráf pontosan akkor fa, ha az alábbi állítások közül legalább 2 teljesül: (1) $G$ összefüggő (2) $G$ körmentes (3) $G$-nek eggyel kevesebb éle van, mint ahány pontja.

**Def:** Az $F$ fa *levele* az $F$ elsőfokú csúcsa. **Áll.:** Minden legalább kétpontú fának van legalább két levele.

**Def:** A $G$ gráf *síkbarajzolható*, ha létezik $G$-nek egy olyan diagramja, melyben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. A síkbarajzolás a síkot *tartományokra (lapokra)* osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartományról nem beszélünk.

**Tétel:** A $G$ gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

**Köv.:** Tetszőleges konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.

**Tétel:** Ha $G$ sr, $n$ csúcsa, $e$ éle, $k$ komponense és $t$ tartománya van, akkor $n+t = e+k+1$

**Köv.:** Ha $G$ sr, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

**Köv.:** (**Euler-formula**) Ha egy öf, $n$-pontú, $e$-élű gráf $t$ tartománnyal síkbarajzolható, akkor $n+t = e+2$.

**Köv.:** Ha $G$ egyszerű, legalább 3-pontú, sr gráf, akkor $e \leq 3n-6$ . Ha $G$-ben nincs háromszöglap, akkor $e \leq 2n-4$.

**Köv.:** Ha $G$ sr és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

**Köv.:** Sem $K_5$, sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

**Def:** A $G$ és $H$ gráfok *topologikusan izomorfak*, ha $H$ megkapható $G$-ből az alábbi lépésekkel:
(1) Törlünk egy $uv$ élt, és beveszünk egy új csúcsot, $u$ és $v$ szomszédokkal.
(2) Törlünk egy másodfokú $x$ csúcsot, és éllel összekötjük $x$ két szomszédját.

**Kuratowski tétel:** A $G$ gráf pontosan akkor sr, ha nem tartalmaz sem $K_{3,3}$-mal, sem $K_5$-tel top. izom. részgráfot.

**Fáry-Wagner tétel:** Ha $G$ egyszerű, sr gráf, akkor létezik $G$-nek olyan síkbarajzolása is, melyben minden él egyenes szakaszként van lerajzolva.

**Def:** Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, legyen $V^*$ $G$ lapjainak halmaza. $G^* = (V^*, E^*)$ a $G$ *duálisa*, ahol $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és $e^*$ az $e$-t határoló tartomány(oka)t összekötő él.

**Def:** A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha $Q$ egy olyan élhalmaz, hogy elhagyásakor $G$ komponenseinek száma megnő, és $Q$ egy legszűkebb ilyen élhalmaz, azaz $Q$ semelyik valódi részhalmazára ez nem teljesül. Az $e$ él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A $G$ gráf $e$ és $e'$ élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

**Tétel:** Legyen $G = (V, E)$ sr. (1) Ha $G^*$ a $G$ duálisa, akkor $G^*$ sr és öf.
(2) $f(e) := e^*$ egy $E(G) \to E(G^*)$ természetes bijekciót definiál, $G$ lapjai pedig bijektíven $G^*$ pontjainak felelnek meg.
(4) Ha $e, f$ a $G$, $e^*, f^*$ a megfelelő duális élek, akkor $e \in E(G)$ a $G$ hurokéle (elvágó éle) $\iff$ $f(e)$ a $G^*$ elvágó éle (hurokéle), $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff$ $f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek, valamint $C \subseteq E(G)$ a $G$ köre (vágása) $\iff$ $f(C)$ $G^*$ vágása (köre).
(5) Ha $G$ öf, akkor $G = (G^*)^*$, és ekkor $G$ pontjai bijektíven $G^*$ lapjainak felelnek meg.
(6) Ha $G$ öf, akkor $F \subseteq E(G)$ a $G$ feszítőfája $\iff$ $f(F)$ a $G^*$ egy feszítőfájának komplementere.

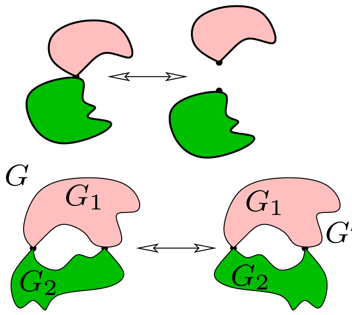
**Def:** A $G$ gráf a $H$ gráf *absztrakt duálisa*, ha létezik egy $\varphi : E(G) \to E(H)$ bijekció úgy, hogy $C$ a $G$ köre $\iff$ $\varphi(C)$ a $H$ vágása és $Q$ a $G$ vágása $\iff$ $\varphi(Q)$ a $H$ köre.

**Whitney tétel:** A $G$ gráfnak pontosan akkor létezik absztrakt duálisa, ha $G$ sr.

**Def:** $G$ és $H$ gráfok *gyengén izomorfak (2-izomorfak)*, ha éleik között létezik egy $\varphi : E(G) \to E(H)$ bijekció úgy, hogy $C$ pontosan akkor köre a $G$ gráfnak, ha a $C$ éleinek megfelelő élek (azaz $\varphi(C) = \{\varphi(c) : c \in C\}$) a $H$ köre.

**Whitney tétele:** Ha $G$ síkbarajzolható, továbbá $G$ és $H$ gyengén izomorf, akkor (1) $H$ is síkbarajzolható, (2) $G^*$ és $H^*$ gy. izom., végül (3) $G$ és $(G^*)^*$ gy. izom.

**Tétel: (Whitney)** Ha $G$ és $H$ gyengén izomorf, akkor $H$ előállítható $G$-ből a jobb oldali ábrán látható 3 operáció ismételt alkalmazásával.




**Def:** Az $f : A \to B$ függvény *injektív*, ha különböző elemek képe különböző, azaz $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Az $f$ *szürjektív* (ráképezés), ha $B = f(A) := \{f(a) : a \in A\}$, azaz $B$ minden eleme valamely $A$-beli elem képe. Ha $f$ injekció és szürjekció is, akkor *bijekció*, magyarul kölcsönösen egyértelmű leképezés.

**Def:** Az $A$ halmaz *számossága azonos* a $B$ halmaz számosságával ($|A| = |B|$), ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Az $A$ halmaz *számossága kisebb vagy egyenlő* a $B$ halmaz számosságával ($|A| \leq |B|$), ha létezik $f : A \to B$ injekció, vagy más szóval, ha az $A$ halmaz és a $B$ halmaz egy részhalmaza között létezik bijekció.

**Megf.:** Tetszőleges $A, B, C$ halmazok esetén $|A| \leq |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$ (tranzitivitás), ill. $|A| \leq |A|$ (szimmetria).

**Def:** A *trichotómia* az a tulajdonság, hogy bármely két $A$ és $B$ halmaz között az alábbi tulajdonságok közül pontosan egy teljesül: $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ ill. $|A| > |B|$.

**Megj.:** A trichotómia a kiválasztási axiómából következik, a nélkül nem igaz.

**Def:** Az $A$ halmaz hatványhalmaza az $A$ részhalmazainak halmaza, azaz $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$.

**Pl:** $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$.

A *kiválasztási axióma* szerint bármely $A$ nemüres halmazhoz létezik $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ *kiválasztási függvény*, amire $f(X) \in X$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subseteq A$ esetén.

A kiválasztási axióma független a halmazelmélet "maradék" axiómáitól, azaz akár a kiválasztási axiómát, akár annak tagadását vesszük axiómának, ettől nem kerül ellentmondás a rendszerbe.

**Cantor-Bernstein tétel**: Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

**Def:** Az $A$ halmaz megszámlálható, ha $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Ekkor $|A| = \aleph_0$

**Megf.:** Ez pontosan akkor igaz, ha $A$ elemei sorba rendezhetők: $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

**Def:** Az $A$ halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Jelölése: $|A| = \mathfrak{c}$.

**Cantor tétel**: Tetszőleges $X$ halmaz számossága kisebb $\mathcal{P}(X)$ számosságánál.

**Köv.:** Nincs legnagyobb számosságú halmaz.

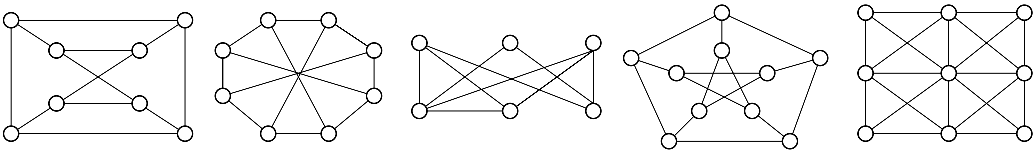
**Tétel:** Ha $I$ a $(0,1)$ nyílt intervallum, akkor $|I^2| = |I|$, azaz kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniója kontinuum számosságú.

**Kontinuum hipotézis** A megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum között nincs más számosság.

A kontinuum hipotézis független a halmazelmélet többi axiómáitól, még a kiválasztási axiómát is beleértve.

## Gyakorlatok

1. Hány pontja van annak a $T$ fának, amire $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$ teljesül? (V '00)
2. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik $k$ oldalú sokszög. Mennyi a $k$ értéke? (V '99)
3. Egy konvex test minden lapja 4-szög vagy 8-szög, továbbá minden csúcsban 3 lap találkozik. Mennyi a 4-szöglapok és 8-szöglapok számának különbsége? (V '00)
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $G$ $n$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor a) $G$ bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik továbbá b) $G$-nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy $G$ tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
5. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amelynek három háromszöglapja, három négszöglapja és egy ötszöglapja van?
6. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy a lerajzoláskor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. (V '00)
7. Síkbarajzolhatóak-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok. Hát az alábbiak?



8. Van-e olyan 9-pontú $G$ gráf, hogy sem $G$ sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható? (V '01)
9. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem duálisa a duálisának.
10. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G$ sr gráf sem elvágó élt, sem pedig soros éleket sem tartalmaz, akkor létezik $G$-nek olyan $G^*$ duálisa, ami egyenes szakaszokkal rajzolható síkba.
11. Mutassuk meg, hogy a $K_5$, és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G$ gráf síkbarajzolható, és $G$-be behúzunk egy $e$ élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
12. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
13. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van!
14. Igazoljuk, hogy ha $G$ $n$ pontú sr gráf, és $G$ izomorf $G^*$-gal, akkor $G$-nek $2n - 2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$-ra mutassunk példát ilyen $G$-re!
15. Tfh $G$ sr, és $G$ minden lapja háromszög, ill., hogy $G^*$ minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van $G$-nek?
16. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy a lerajzoláskor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. (V '00)
17. Legalább hány élmetszéspontnak kell lennie a Petersen gráf síkeli diagramján?
18. Van-e olyan 9-pontú $G$ gráf, hogy sem $G$ sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható? (V '01)
19. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem duálisa a duálisának.
20. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G$ sr gráf sem elvágó élt, sem pedig soros éleket sem tartalmaz, akkor létezik $G$-nek olyan $G^*$ duálisa, ami egyenes szakaszokkal rajzolható síkba.
21. Mutassuk meg, hogy a $K_5$, és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G$ gráf síkbarajzolható, és $G$-be behúzunk egy $e$ élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
22. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak! Mutassunk rá, miért helytelen a bizonyításunk.
23. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van!
24. Igazoljuk, hogy ha $G$ $n$ pontú sr gráf, és $G$ izomorf $G^*$-gal, akkor $G$-nek $2n - 2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$-ra mutassunk példát ilyen $G$-re!
25. Tfh $G$ sr, és $G$ minden lapja háromszög, ill., hogy $G^*$ minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van $G$-nek?
26. Tanultuk, hogy az $\mathbb{N}$ halmaz részhalmazainak számossága kontinuum. Mi a számossága az $\mathbb{N}$ halmaz *véges* részhalmazainak?
27. Mi a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának számossága? Hát a komplex számoké?
28. Mennyi kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniójának számossága?
29. Legyen $[n]$ az első $n$ pozitív egész halmaza. Mi a számossága az $[1] \times [2] \times [3] \times \ldots$ halmaznak, tehát annak, aminek elemei azok a végtelen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatok, amire $a_i \in [i]$ teljesül minden $i$-re?
30. Mennyi az $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{C}^2$ halmazok számossága?
31. Mennyi kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniójának számossága?
32. Mi a számossága az olyan $x$ valós számok halmazának, melyekhez található olyan $n$ pozitív egész szám, amire $x^n$ racionális? (V '99)
33. Mennyi a komplex egységgyökök számossága?
34. Hány megszámlálható részhalmaza van $\mathbb{R}$-nek?
35. Mennyi az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények számossága? Hát az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ill. az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ függvényeké?