

# Bevezetés a számításelméletbe 1.

13. gyakorlat, 2012. május 2. 8<sup>20</sup>, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

## Tudnivalók

**Def:**  $G = (V, E)$  egyszerű gráf, ha (1)  $V \neq \emptyset$  és (2)  $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ .  $G$  gráf esetén  $V(G)$  jelöli  $G$  csúcsainak (pontjainak),  $E(G)$  pedig  $G$  éleinek halmazát, azaz  $G = (V(G), E(G))$ . A  $G$  egyszerű gráf véges, ha  $V$  és  $E$  egyaránt véges halmazok.

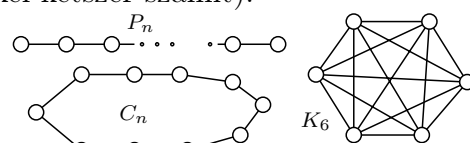
**Def:** A  $G$  gráf egy *diagramja* a  $G$  egy olyan lerajzolása, amiben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő önmagukat nem metsző görbék. A  $G$  gráf *szomszédossági mátrixa* egy olyan táblázat, aminek sorai és oszlopai a  $G$  csúcsainak felelnek meg, és adott sor és oszlop metszéspontjában a megfelelő csúcsok között futó élek száma áll. A  $G$  gráf éllistas megadása azt jelenti, hogy minden csúcshoz tartozik egy éllista, amiben az adott csúcsból induló élek másik végpontjai vannak felsorolva.

**Def:** Az  $e = \{u, v\}$  élt röviden  $e = uv$ -vel jelöljük;  $u$  és  $v$  az  $e$  él *végpontjai*.  $u$  és  $v$  *szomszédos*, ha  $uv \in E$ . Az  $e$  és  $f$  élek *párhuzamosak*, ha végpontjaik azonosak. *Hurokél* az olyan él, aminek végpontjai azonosak.

**Def:** A  $G = (V, E)$  pár gráf, ha  $V \neq \emptyset$ ,  $E$  élhalmaz  $V$ -n, és párhuzamos és hurokél is megengedett.

**Def:** A  $G$  gráf  $v$  csúcsának  $d(v)$  fokja a  $v$  végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):

$d(v) := |\{e \in E : v \text{ végpontja } e\text{-nek}\}| + |\{e \in E : e \text{ hurokél és } v\text{-n}\}|$



**Áll.:** Ha  $G$  véges gráf, akkor fokszámainak összege  $2|E(G)|$ .

**Def:**  $K_n$  az  $n$ -pontú teljes gráf: tetsz. két pontja szomszédos.

**Def:**  $P_n$  az  $n$ -pontú út,  $C_n$  az  $n$ -pontú kör (ld. az ábrán)

**Def:** A  $G$  egyszerű gráf *komplementere* a  $\bar{G} := (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$  gráf. (Két pont pontosan akkor szomszédos  $\bar{G}$ -ben, ha  $G$ -ben nem szomszédosak.)

## Gyakorlatok

1. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
2. Ha  $n$  focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma? (\*)
3. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezét fogják (a nők is). Természetesen senki sem fog kezét a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezét, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezét Kovácsné? (\*)
4. Az előre megszámozott (címkézett)  $n$  darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH '00)
5. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű  $G$  gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
6. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Ha  $G$  nem véges, akkor ez nem igaz.
7. Rajzoljuk le azt a gráfot, aminek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  akkor a másik a  $(b_2, b_3, b_4, b_1)$  sorozathoz tartozó pont. (ZH '00)
8. Mutassuk meg, hogy ha egy  $G$  gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor  $G$ -nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, amiben két másodfokú és négy harmadfokú pont van? (ZH '00)
10. Igazoljuk, hogy ha  $G$  egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $T_1$  és  $T_2$  véges fák ponthalmaza azonos és  $e_1$   $T_1$  éle, akkor létezik  $T_2$ -nek egy  $e_2$  éle, hogy  $T_1 - e_1 + e_2$  és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amiben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú? (ZH '98)
13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
14. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? (V '99)
15. Hány pontja van annak a  $T$  fának, amire  $|E(\bar{T})| = 15 \cdot |E(T)|$  teljesül? (V '00)