Bevezetés a számításelméletbe 1.

12. gyakorlat, 2012. április 25. $8^{\underline{20}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: A *komplex számok halmaza* $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol a z komplex szám *kanonikus (algebrai) alakja* $z = a + bi$, *valós része* $\mathrm{Re}\, z = a$, *képzetes része* $\mathrm{Im}\, z = b$, *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$. Az összeadást, kivonást, szorzást úgy végezzük, mintha az i változó lenne, amire $i^2 = -1$:
$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$, $\quad (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$,
$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. Osztani a nevező konjugálttal való bővítésével tudunk:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{aa'-bb'+(ab'+a'b)i}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'-bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{(ab'+a'b)}{a'^2+b'^2}i\ .$$

A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, *trigonometrikus alakja* $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, ahol α a komplex számsík pozitív valós tengelyének és az origóból a z-nek megfelelő pontba mutató vektornak az előjeles szöge. Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ szám *n-dik egységgyök*, ha $\varepsilon^n = 1 (= 1 + 0i)$.

Tétel: Tetszőleges $z, w, t \in \mathbb{C}$ komplex számokra teljesül, hogy (1) z kanonikus alakja egyértelmű, (2) $\overline{\overline{z}} = z$, (3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, (4) ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor $0 < z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$, (5) $z + w = w + z$, $zw = wz$, $(z + w) + t = z + (w + t)$, $(zw)t = z(wt)$, $z(w + t) = zw + zt$, $z - w = z + (0 - w)$, $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, (6) $zw = 0 \iff z = 0$ vagy $w = 0$, (7)$|z| \geq 0$, továbbá $|z| = 0 \iff z = 0$, (8) a z-nek megfelelő pont távolsága a komplex számsík origójától $|z|$, (9) $|z + w| \leq |z| + |w|$, (10) komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorzódnak, a szögek összeadódnak, míg osztáskor az abszolút értékeket osztjuk, a szögeket kivonjuk, (11) a trigonometrikus alak nem egyértelmű (ha z szöge α, akkor $\alpha + 2k\pi$ is megfelel, $z = 0$-nak bármely α a szöge), (13) a komplex egységgyökök abszolút értéke 1, (14) az n-dik komplex egységgyökök száma n, ezek az origó közepű, egységsugarú körön egy szabályos, n-oldalú sokszöget alkotnak, aminek egyik csúcsa az $\varepsilon = 1$. Formálisan: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ az n-dik egységgyökök, ahol $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$.

Def: Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa* $n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{ha } n > 0 \\ 1 & \text{ha } n = 0 \end{cases}$. Az „n alatta k” (vagy „n alatt a k”?) *binomiális együttható* pedig $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Def: *n elem k-adosztályú (ismétlés nélküli) variációja*: n különböző elem közül k db sorba rendezése, ismétlődés nincs. Számuk $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
n elem k-adosztályú ismétléses variációja: n különböző elem közül k db sorba rendezése, ismétlődés lehetséges. Számuk $V_{ism}(n, k) = n^k$
n elem k-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációja: n különböző elem közül k db kiválasztása, ismétlődés nincs, sorrend nem számít. Számuk: $C(n, k) = \binom{n}{k}$
n elem k-adosztályú ismétléses kombinációja: n különböző fajta elem közül k db kiválasztása, ismétlődés lehetséges, sorrend nem számít. Számuk: $C_{ism}(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$
n elem permutációja: n különböző elem sorbarendezése, ismétlődés nincs. Számuk $n!$
n elem k-adosztályú ismétléses kombinációja: adottak a $k_1, k_2, \ldots, k_l$ pozitív egészek, melyekre $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$. Az egyes elemfajtákból rendre $k_1, k_2, \ldots, k_l$ db van. Az ismétléses permutáció ezen elemek egy lehetséges sorbarendezése, az azonos fajtájú elemek nem megkülönböztethetőek. Számuk $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_l!}$.

Áll.: (1): $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, (2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}$

Áll.: (1): $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ (2): $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ (3): $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$

Gyakorlatok

1. (a) $z + \overline{z} = 2\,|z|$,
   (b) $\overline{z} = z^{1996}$,
   (c) $z^2 + z + 1 = 0$,
   (d) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$ (ZH, 1993.),
   (e) $1/iz = \overline{iz}$ (ZH, 1991.),
   (f) $1 + iz - z^2 = 0$ (V, 1999.)
   (g) $z(1 + i) - \overline{z}(1 - i) = 2i$ (ZH '99)
2. (a) Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát?
   (b) Ugyanez a kérdés, csak a vizsgálandó kifejezés legyen most $\frac{1+ti}{t+i}$.
   (c) Mely z komplex számokra lesz $z/\overline{z}$ tiszta képzetes?
   (d) Mely z komplex számokra lesz $z + \overline{z}^2$ valós?
   (e) Mely komplex számokra teljesül, hogy $z^2 + \overline{z} = \overline{z}^2 + z$? (ZH '98)
3. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$, iz geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük a valós, a képzetes tengelyre, illetve az $y = x$ egyenletű egyenesre?
4. Jellemezzük azon komplex (a, b) számpárokat, melyekre $a + b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$.
5. Milyen pozitív egész n-re lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ szám? (ZH '01)
6. Mi a $z = (1 - i)^{2000} - i(1 + i)^{2002}$ komplex szám kanonikus alakja? (ZH '00)

7. Mi a (használható) szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a z_1, z_2 és z_3 külöböző komplex számok egy egyenesbe essenek a komplex számsíkon?
8. Adjuk meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját. $1+i$, $5-12i$, $\sqrt{3}-i$, $\sin\alpha - i\cos\alpha$. Mi a $\frac{(-1+i)^{1998}}{(1+i)^{2000}}$ kanonikus alakja ? Hát a $\left(\frac{3-i}{2-4i}\right)^{2000}$-é? (V '99)
9. Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök. Mi a feltétele annak, hogy két egységgyök összege is egységgyök legyen?
10. Mennyi az n-edik komplex egységgyökök összege, illetve szorzata?
11. Van-e a 9-dik egységgyökök között hat, melyek összege 0? És hét? (V '92)
12. Igazoljuk, hogy az 1995-ödik egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.
13. Legyen $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$. Mennyi $z^{1997} + z^{-1997}$?
14. A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?
15. Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
16. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találathoz (a tizenháromból)?
17. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
18. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt? És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
19. Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?
20. Hány olyan tízjegyű szám van, amiben van 5-ös számjegy? (Tízjegyű szám nem kezdődhet 0-val.)
21. Egy adott $n \times k$ méretű csokoládéból hányféleképpen lehet kisebb csokoládét törni? (A csokoládét nem olvaszthatjuk be, csak a rovátka mentén törhetünk.)
22. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
23. Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?
24. Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?
25. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok futókra? (*))
26. Bb: bármely pozitív egész n számra $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$.
27. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
28. Hányféleképp lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek közt a sorsolás után?
29. Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K		T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

30. Hányféleképpen ültethetünk le n^2 embert n db, egyenként n üléses sorba úgy, hogy minden egyes sorban az ott ülők életkoruk szerint balról jobbra növekvő sorrendben foglaljanak helyet? (Tegyük fel, hogy mind az n^2 szereplő életkora különböző.) (ZH '98)
31. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (A játékosokat különbözőknek tekintjük, és az is számít, hogy a páros meccset játszó négy játékos közül ki kinek a partnere.) (ZH '99)
32. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra? (ZH '01)
33. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban $k_1, k_2, \ldots, k_n$ szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
34. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma? (*)
35. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezet fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezet a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezet, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? (*)