Bevezetés a számításelméletbe 1.

12. gyakorlat, 2012. május 3. $16^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak`)

Tudnivalók

Def: $G=(V,E)$ *egyszerű gráf*, ha (1) $V\neq\emptyset$ és (2) $E\subseteq\binom{V}{2}:=\{\{u,v\}:u,v\in V,u\neq v\}$
G gráf esetén $V(G)$ jelöli G *csúcsainak (pontjainak)*, $E(G)$ pedig G *éleinek* halmazát, azaz $G=(V(G),E(G))$. A G egyszerű gráf *véges*, ha V és E egyaránt véges halmazok.

Def: A G gráf egy *diagramja* a G egy olyan lerajzolása, amiben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő önmagukat nem metsző görbék. A G gráf *szomszédossági mátrixa* egy olyan táblázat, aminek sorai és oszlopai a G csúcsainak felelnek meg, és adott sor és oszlop metszéspontjában a megfelelő csúcsok között futó élek száma áll. A G gráf éllistás megadása azt jelenti, hogy minden csúcshoz tartozik egy éllista, amiben az adott csúcsból induló élek másik végpontjai vannak felsorolva.

Def: Az $e=\{u,v\}$ élt röviden $e=uv$-vel jelöljük; u és v az e él *végpontjai.* u és v *szomszédos*, ha $uv\in E$. Az e és f élek *párhuzamosak*, ha végpontjaik azonosak. *Hurokél* az olyan él, aminek végpontjai azonosak.

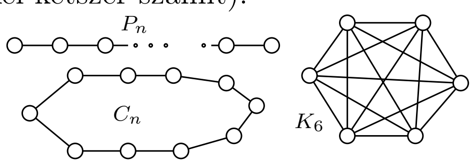
Def: A $G=(V,E)$ pár *gráf*, ha $V\neq\emptyset$, E élhalmaz V-n, és párhuzamos és hurokél is megengedett.

Def: A G gráf v csúcsának $d(v)$ *foka* a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):
$d(v):=|\{e\in E: v \text{ végpontja } e\text{-nek}\}|+|\{e\in E: e \text{ hurokél és } v\text{-n}\}|$

Áll.: Ha G véges gráf, akkor fokszámainak összege $2|E(G)|$.

Def: K_n az n-pontú *teljes gráf*: tetsz. két pontja szomszédos.

Def: P_n az n*-pontú út*, C_n az n*-pontú kör* (ld. az ábrán)



Def: A G egyszerű gráf *komplementere* a $\overline{G}:=(V(G),\binom{V}{2}\setminus E(G))$ gráf. (Két pont pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha G-ben nem szomszédosak.)

Gyakorlatok

1. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
2. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma? (*)
3. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezet fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezet a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezet, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? (*)
4. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH '00)
5. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
6. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Ha G nem véges, akkor ez nem igaz.
7. Rajzoljuk le azt a gráfot, aminek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy „forgatással" megkapható, azaz ha az egyik a (b_1,b_2,b_3,b_4) akkor a másik a (b_2,b_3,b_4,b_1) sorozathoz tartozó pont. (ZH '00)
8. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, amiben két másodfokú és négy harmadfokú pont van? (ZH '00)
10. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Bizonyítsuk be, hogy ha a T_1 és T_2 véges fák ponthalmaza azonos és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1-e_1+e_2$ és $T_2-e_2+e_1$ is fa.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amiben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú? (ZH '98)
13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
14. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? (V '99)
15. Hány pontja van annak a T fának, amire $|E(\overline{T})|=15\cdot|E(T)|$ teljesül? (V '00)