

Bevezetés a számításelméletbe 1.

10. gyakorlat, 2012. április 11. 8²⁰, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: Legyen $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés, $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ az U , B_2 pedig a V bázisa. Az \mathcal{A} leképezés mátrixa $[\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1} := ([\mathcal{A}(u_1)]_{B_2} | [\mathcal{A}(u_2)]_{B_2} | \dots | [\mathcal{A}(u_n)]_{B_2})$. (Az i -dik oszlop az i -dik bázisvektor képének koordinátavektora.)

Állítás: Ha $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lin. lekép. és $B_1 \subseteq U$ és $B_2 \subseteq V$ bázisok akkor $[\mathcal{A}(u)]_{B_2} = [\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1} [u]_{B_1} \forall u \in U$, azaz a leképezett vektor koordinátavektorát úgy kapjuk, hogy a kiindulási vektor koordinátavektorát balról megszorozzuk a leképezés mátrixával.

Ha pedig $\mathcal{B} : V \rightarrow W$ is lin. lekép. és $B_3 \subseteq W$ bázis, akkor a kompozíció is lineáris leképezés, aminek mátrixa $[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{B_3}^{B_1} = [\mathcal{B}]_{B_3}^{B_2} \cdot [\mathcal{A}]_{B_2}^{B_1}$. (Természetesen $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(u) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(u))$.)

Def: Az $u \in V$ vektor az \mathcal{A} lin. trafó $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha (1) $u \neq \mathbf{0}$ és (2) $\mathcal{A}(u) = \lambda \cdot u$. A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha (1) $\underline{v} \neq \underline{0}$ és (2) $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$. A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér: $\{u \in V : \mathcal{A}(u) = \lambda \cdot u\}$ ill. $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : A\underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}\}$ attól függően, hogy lineáris transzformációról, vagy mátrixról beszélünk.

Tétel: Lineáris transzformáció minden sajátvektora pontosan egy sajátértékhez tartozik.

A λ -hoz tartozó sajátaltér a λ -hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból áll. A λ -hoz tartozó sajátaltér altér.

Áll. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátalterének elemei pontosan a $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$ mátrixos alakban felírt (homogén) lineáris egyenletrendszer megoldásai lesznek. (Ha λ nem sajátérték, akkor csak a $\mathbf{0}$ lesz megoldás, azaz nincs λ -hoz tartozó sajátvektor.)

Tétel: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor sajátértéke, ha $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$.

Tétel: A karakterisztikus polinom független a mátrixalak felírásához használt bázistól.

Saját dolgok számítása Adott mátrix sajátértékei meghatározhatók a karakterisztikus polinom gyökeiként, adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig egy homogén (azaz jobboldalán $\mathbf{0}$ -t tartalmazó) lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiént adódnak. Egy adott sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója ezen lineáris egyenletrendszer szabad paramétereinek száma, és a sajátaltér egy bázisa pl. azok a megoldások adják, amelyekben egyetlen szabad paramétert 1-nek a többit pedig 0-nak választjuk az összes lehetséges módon.

Gyakorlatok

1. A síknak, mint valós vektortérnek lineáris transzformációi a tengelyekre való tükrözések, az $y = x$ egyenesre való tükrözés, és minden α szögű, origó körüli elforgatás. Adjuk meg e leképezések mátrixát a szokásos bázisban.
2. A legfeljebb 10-edfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak \mathbb{R} felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban és határozzuk meg Φ kép- ill. magterét.
3. Legyen $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az A^k mátrixot minden $k > 0$ egészre.
4. Tekintsük a 3-dimenziós valós térnek azt az \mathcal{A} lineáris transzformációját, amit úgy kapunk, hogy alkalmazzuk a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix által leírt lineáris transzformációt, majd az így kapott vektort vetítjük az yz síkra az origó körül elforgatjuk 90° -kal úgy, hogy az y tengely a z tengelyre kerüljön. Határozzuk meg \mathcal{A} mátrixát a szokásos $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bázisban.
5. Legyen \mathcal{A} olyan lineáris transzformáció \mathbb{R}^2 -en, amire $(2, 3)$ a $\lambda = 3$ -hoz tartozó sajátvektor és $(1, 2) \in \text{Ker}(\mathcal{A})$. Határozzuk meg az \mathcal{A} leképezésnek a $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bázishoz tartozó mátrixát.
6. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és a sajátaltereit, ha vannak.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Mik lehetnek az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció sajátértékei, ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(v)$ minden $v \in V$ -re? (ZH '98)
8. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak sajátértéke a $\lambda = 5$. Határozzuk meg az $B = 3A - 8I_n$ és $C = A^3 - 7A$ mátrixok egy-egy sajátértékét.
9. Igazoljuk, hogy ha a λ skalár sajátértéke az A mátrixnak, akkor sajátértéke az A^T mátrixnak is. (ZH '98)
10. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az A mátrix A^{-1} inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám. (ZH '99)
11. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & c \end{pmatrix}$ mátrixnak a $\lambda = 3$ sajátértéke legyen! Határozzuk meg ekkor a legnagyobb sajátértéket, és keressünk egy ehhez tartozó sajátvektort is. (ZH '04)
12. Az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációt *tükrözésnek* nevezzük, ha a V valós vektortér tetszőleges v vektorára $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$ teljesül. Mi lehet a tükrözés mátrixának a determinánsa? Határozzuk meg a tükrözés transzformáció lehetséges sajátértékeit! (ZH '00)