Bevezetés a számításelméletbe 1.

10. gyakorlat, 2012. április 19. $16^{\underline{15}}$, IB 138

Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu, www.cs.bme.hu/~fleiner/bszgyak)

Tudnivalók

Def: A *komplex számok halmaza* $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol a z komplex szám *kanonikus (algebrai) alakja* $z = a + bi$, *valós része* $\mathrm{Re}\, z = a$, *képzetes része* $\mathrm{Im}\, z = b$, *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$. Az összeadást, kivonást, szorzást úgy végezzük, mintha az i változó lenne, amire $i^2 = -1$:
$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$, $\quad (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$,
$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. Osztani a nevező konjugálttal való bővítésével tudunk:

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' - bb' + (ab' + a'b)i}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{(ab' + a'b)}{a'^2 + b'^2} i \ .$$

A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, *trigonometrikus alakja* $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, ahol α a komplex számsík pozitív valós tengelyének és az origóból a z-nek megfelelő pontba mutató vektornak az előjeles szöge. A $w \in \mathbb{C}$ komplex szám a $z \in \mathbb{C}$ szám *n-dik gyöke*, ha $w^n = z$. Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ szám *n-dik egységgyök*, ha $\varepsilon^n = 1 (= 1 + 0i)$.

Tétel: Tetszőleges $z, w, t \in \mathbb{C}$ komplex számokra teljesül, hogy (1) z kanonikus alakja egyértelmű, (2) $\overline{\overline{z}} = z$, (3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, (4) ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor $0 < z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$, (5) $z + w = w + z$, $zw = wz$, $(z + w) + t = z + (w + t)$, $(zw)t = z(wt)$, $z(w + t) = zw + zt$, $z - w = z + (0 - w)$, $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, (6) $zw = 0 \iff z = 0$ vagy $w = 0$, (7)$|z| \geq 0$, továbbá $|z| = 0 \iff z = 0$, (8) a z-nek megfelelő pont távolsága a komplex számsík origójától $|z|$, (9) $|z + w| \leq |z| + |w|$, (10) komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorzódnak, a szögek összeadódnak, míg osztáskor az abszolút értékeket osztjuk, a szögeket kivonjuk, (11) a trigonometrikus alak nem egyértelmű (ha z szöge α, akkor $\alpha + 2k\pi$ is megfelel, $z = 0$-nak bármely α a szöge), (12) ha $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, akkor z n-dik gyökének trigonometrikus alakja $w = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i \sin\frac{\alpha+2k\pi}{n})$, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$, (13) a komplex egységgyökök abszolút értéke 1, (14) az n-dik komplex egységgyökök száma n, ezek az origó középű, egységsugarú körön egy szabályos, n-oldalú sokszöget alkotnak, aminek egyik csúcsa az $\varepsilon = 1$. Formálisan: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ az n-dik egységgyökök, ahol $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$.

Gyakorlatok

1. (a) $z + \overline{z} = 2\,|z|$,
   (b) $\overline{z} = z^{1996}$,
   (c) $z^2 + z + 1 = 0$,
   (d) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$ (ZH, 1993.),
   (e) $1/iz = \overline{iz}$ (ZH, 1991.),
   (f) $1 + iz - z^2 = 0$ (V, 1999.)
   (g) $z(1 + i) - \overline{z}(1 - i) = 2i$ (ZH '99)
2. (a) Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát?
   (b) Ugyanez a kérdés, csak a vizsgálandó kifejezés legyen most $\frac{1+ti}{t+i}$.
   (c) Mely z komplex számokra lesz $z/\overline{z}$ tiszta képzetes?
   (d) Mely z komplex számokra lesz $z + \overline{z}^2$ valós?
   (e) Mely komplex számokra teljesül, hogy $z^2 + \overline{z} = \overline{z}^2 + z$? (ZH '98)
3. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$, iz geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük a valós, a képzetes tengelyre, illetve az $y = x$ egyenletű egyenesre?
4. Jellemezzük azon komplex (a, b) számpárokat, melyekre $a + b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$.
5. Milyen pozitív egész n-re lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ szám? (ZH '01)
6. Mi a $z = (1 - i)^{2000} - i(1 + i)^{2002}$ komplex szám kanonikus alakja? (ZH '00)
7. Mi a (használható) szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a z_1, z_2 és z_3 külöböző komplex számok egy egyenesbe essenek a komplex számsíkon?
8. Adjuk meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját. $1 + i$, $5 - 12i$, $\sqrt{3} - i$, $\sin\alpha - i\cos\alpha$. Mi a $\frac{(-1+i)^{1998}}{(1+i)^{2000}}$ kanonikus alakja ? Hát a $\left(\frac{3-i}{2-4i}\right)^{2000}$-é? (V '99)
9. Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök. Mi a feltétele annak, hogy két egységgyök összege is egységgyök legyen?
10. Mennyi az n-edik komplex egységgyökök összege, illetve szorzata?
11. Van-e a 9-dik egységgyökök között hat, melyek összege 0? És hét? (V '92)
12. Igazoljuk, hogy az 1995-ödik egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.
13. Legyen $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$. Mennyi $z^{1997} + z^{-1997}$?