Bevezetés a számításelméletbe I.

2. ZH javítókulcs (2012.04.19.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Legyen az $A(x)$ olyan $n \times n$ méretű mátrix, aminek bal felső sarkában az x változó, a maradék n^2-1 helyen pedig konkrét valós számok állnak. Tegyük fel, hogy $\det(A(x)) = 3x - 7$ teljesül minden x valós számra. Határozzuk meg annak az A' mátrixnak a determinánsát, amit A első sorának és első oszlopának elhagyásával kapunk.

   Az $A(x)$ mátrix determinánsát az első sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy
   $3x - 7 = |A(x)| = x \cdot |A'| + (A(x))_1^2 (A(x))_{1,2} + (A(x))_1^3 (A(x))_{1,3} + \ldots + (A(x))_1^n (A(x))_{1,n}$. (5 pont)
   A jobb oldalon az első után következő tagok mindegyike egy valós szám, így az x változó kizárólag az első tagban fordul elő. (3 pont)
   Ennek alapján $3x = x \cdot |A'|$, tehát $|A'| = 3$ (2 pont)

2. Legyen X az $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze. Határozzuk meg az $X \cdot (A^2 + A)$ mátrixot.

   Tudjuk, hogy A pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Jelen esetben az első oszlop szerint kifejtve $|A| = 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -1$, tehát az X mátrix létezik. (1 pont)
   Ekkor $X \cdot (A^2 + A) = A^{-1} \cdot (A^2 + A) = A^{-1} \cdot A^2 + A^{-1} \cdot A =$ (4 pont)
   $= A^{-1} \cdot A^2 + A^{-1} \cdot A = A + I_3 =$ (4 pont)
   $= A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont)
   Természetesen nem tilos kiszámítani az $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot sem, (3 pont)
   Ezt követi $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ kiszámítása, (3 pont)
   majd $A^2 + A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ felírása után (1 pont)
   már csak egy mátrixszorzás van hátra. (3 pont)

3. Határozzuk meg azt az A mátrixot, amire $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Mivel A az A^{-1} mátrix inverze, ezért az órán tanult módon járunk el a megadott mátrix inverzének kiszámításakor. (2 pont)
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
   (7 pont)
   Tehát létezik a keresett A mátrix, és nem más mint $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont)

4. Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ lineáris leképezés, B_1 az U, B_2 pedig a V tér egy bázisa. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ leképezést e két bázisban felírva az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk. Határozzuk meg $\mathcal{A}$ képterének dimenzióját.

Az $\mathrm{Im}(A)$ képteret az $A \cdot v$ oszlopvektorok alkotják. (1 pont)
Az órán láttuk, hogy ezek az oszlopvektorok az A oszlopainak a v koordinátái szerint vett lineáris kombinációi, azaz a képteret A oszlopai generálják. (1 pont)
Ezek szerint a képtér dimenziója megegyezik az A oszlopai által generált vektortér dimenziójával, azaz az A oszlopai közül kiválasztható lineárisan független oszlopok számának maximumával. (2 pont)
Ez pedig nem más, mint A rangja, (1 pont)
amit az órán tanult módszerrel (lépcsős alakra hozással, és a vezéregyesek leszámlálásával) határozunk meg: (1 pont)

$$\begin{pmatrix} 0&1&3&1\\ 2&1&1&5\\ 1&1&2&3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&2&3\\ 2&1&1&5\\ 0&1&3&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&2&3\\ 0&-1&-3&-1\\ 0&1&3&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&2&3\\ 0&1&3&1\\ 0&1&3&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&2&3\\ 0&1&3&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pont})$$

Lépcsős alakot, és abban két vezéregyest kaptunk, tehát $\dim(\mathrm{Im}(A)) = r(A) = 2$. (1 pont)

Az is járható út, hogy meghatározzuk az értelmezési tartomány dimenzióját (ami 4) 1 pontért, felírjuk a dimenziótételt 2 pontért és meghatározzuk a $\mathrm{Ker}(A)$ dimenzióját, azaz a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásakor kapott szabad paraméterek számát 7 pontért.

5. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortéren azt az $\mathcal{A}$ leképezést, ami tetszőleges (x, y, z) vektorhoz az (y, z, x) vektort rendeli. Döntsük el, lineáris-e az $\mathcal{A}$ leképezés, és ha igen, akkor írjuk fel a mátrixát a $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bázisban.

   A leképezés művelettartó tulajdonságát, azaz az additivitást (összeadás megtartását) és a homogenitást (skalárral való szorzattartást) ellenőrizzük. (2 pont)
   Az additivitás: $\mathcal{A}((x,y,z) + (x',y',z')) = \mathcal{A}(x+x', y+y', z+z') = (y+y', z+z', x+x') = (y,z,x) + (y',z',x') = \mathcal{A}(x,y,z) + \mathcal{A}(x',y',z')$,tehát $\mathcal{A}$ additív. (1 pont)
   Szorzattartás: $\mathcal{A}(\lambda \cdot (x,y,z)) = \mathcal{A}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda y, \lambda z, \lambda x) = \lambda \cdot (y,z,x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x,y,z)$, tehát $\mathcal{A}$ homogén is. (1 pont)
   Az $\mathcal{A}$ mátrixának felírásához a bázisvektorok képeinek koordinátavektorait kell meghatároznunk, de a bázis szerencsés választása folytán e koordinátavektorok magukkal a vektorokkal esnek egybe. (1 pont)
   Az így kapott képvektorokatból a tanultak szerint úgy kapjuk $\mathcal{A}$ mátrixát, hogy oszlopvektorokat képezünk, és azokat egymás után írjuk. (2 pont)

   Hát tessék: $[\mathcal{A}]_B^B = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$ (3 pont)

6. Tegyük fel, hogy a négyzetes A mátrixnak v egy sajátvektora. Igazoljuk, hogy v az $A^2 - 2A$ mátrixnak is sajátvektora.

   Azt kell megmutatni, hogy $(A^2 - 2A) \cdot v = \lambda \cdot v$ teljesül alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra. (2 pont)
   Lássuk: $(A^2 - 2A) \cdot v = A^2 \cdot v - (2A) \cdot v =$ (2 pont)
   $= A \cdot (A \cdot v) - 2 \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda \cdot v) - 2 \cdot \lambda \cdot v =$ (3 pont)
   $\lambda \cdot (A \cdot v) - 2 \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot \lambda \cdot v - 2 \cdot \lambda \cdot v = (\lambda^2 - 2\lambda) \cdot v$, (2 pont)
   tehát v az $A^2 - 2A$ mátrixnak a $\lambda^2 - 2\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, és innen a feladat állítása közvetlenül adódik.. (1 pont)