Bevezetés a számításelméletbe I.
1. ZH javítókulcs (2012.03.12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Rajta van-e az origó a $P(-1,1,0), Q(0,4,-1)$ és $R(-4,0,-1)$ pontok által meghatározott síkon?

   Az eredeti mintamegoldás hibás volt (a $\vec{PQ}$ vektor egyik koordinátája rossz volt), az alábbi már a javított változat. Elnézést kérek. *FT*

   Keressük meg először a három pont feszítette S sík $n(a,b,c)$ normálvektorát. Mivel $n \perp \vec{PQ} = (1,3,-1)$ és $n \perp \vec{RQ} = (4,4,0)$, ezért a skalárszorzatuk 0: $a+3b-c=0$ ill. $4a+4b=0$ (3 pont)
   A második egyenletből $b=-a$ adódik, amit az elsőbe helyettesítve $-2a-c=0$-t kapunk. Innen $c=-2a$, tehát $a=1$ választással $n=(1,-1,-2)$ az S egy lehetséges normálvektora. (3 pont)
   Egyúttal azt is látjuk, hogy P, Q és R valóban síkot feszítenek. (0 pont)
   Az S sík normálvektoros egyenlete a P pont alapján tehát $x-y-2z=-1-1=-2$. (2 pont)
   Ebbe az egyenletbe az $O(0,0,0)$ pont koordinátáit behelyettesítve nem teljesül az egyenlőség, (1 pont)
   tehát az origó nem a kérdezett síkon fekszik. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a V vektortérnek a $H=\{a,b,c,d,e,f\}$ részhalmaza rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely 3-elemű X részhalmazára X és $H \setminus X$ ugyanazt az alteret generálja. Igazoljuk, hogy ha $\{a,b,c\}$ lineárisan független vektorok, akkor H-nak bármely 3 vektora lineárisan független.

   Jelölje U az H által generált alteret: $U := \langle a,b,c,d,e,f\rangle$. Tudjuk, hogy $\langle a,b,c\rangle = \langle d,e,f\rangle$, ezért $d,e,f \in \langle a,b,c\rangle$, tehát $\langle a,b,c\rangle = \langle a,b,c,d,e,f\rangle = U$. (3 pont)
   Ugyanilyen módon belátható, hogy H bármely három vektora generálja U-t. (2 pont)
   Mivel $\{a,b,c\}$ lineárisan független, ezért U generátorrendszereként az U egy bázisát alkotja, tehát $\dim(U)=3$. (2 pont)
   Ezért U bármely 3-elemű generátorrendszere az U bázisa, tehát lineárisan független, (2 pont)
   így a fentiek miatt H bármely 3-elemű részhalmaza is lineárisan független. (1 pont)

3. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\underline{w}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ és $\underline{t}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ oszlopvektorok?

   Az órán láttuk, hogy a 3 magasságú oszlopvektorok alkotta vektorteret generálják a $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ vektorok. (2 pont)
   Az órán azt is tanították (a kicserélési tétel következményeként), hogy ha G generátorrendszer, F pedig lineárisan független egy V vektortérben, akkor $|F| \le |G|$ teljesül. (3 pont)
   Innen az adódik, hogy a 3 magasságú oszlopvektorok alkotta vektorterében tetszőleges lineárisan független halmaznak legfeljebb 3 eleme lehet. (4 pont)
   Innen pedig azonnal következik, hogy a $\{\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{t}\}$ halmaz nem lineárisan független. (1 pont)

   Lehet persze egy lineáris kombinációból megkapni a nullvektort, és megmutatni, hogy az ebből az együtthatókra felírt egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Tkp elég egy $\underline{0}$-t előállító nemtriviális lineáris kombináció megadása, nem muszáj indokolni, hogy jött rá a versenyző. Ugyanígy azt is elég megmutatni, hogy a 4 vektor valamelyike hogyan áll elő a többiből, az együtthatók kiszámolása itt sem feltétlenül nem része az indoklásnak. De itt a standard megoldás értékelése is:

   Tegyük fel, hogy $\lambda\underline{u}+\kappa\underline{v}+\mu\underline{w}+\nu\underline{t}=\underline{0}$. (1 pont)
   Az a kérdés, fennállhat-e a fenti egyenlőség úgy, hogy λ,μ,κ, és ν között van nemnulla is. (1 pont)
   Felírjuk, hogy az egyes koordinátákra milyen egyenlőségek teljesülnek: (1 pont)
   $\lambda+\kappa+3\mu+\nu=0, 2\kappa+2\mu+\nu=0$ ill. $\lambda+3\kappa+\mu+3\nu=0$. (1 pont)
   Elkészítjük a fenti egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixát, (1 pont)

és az órán tanult módon keressük a megoldásokat:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&3&1&0\\ 0&2&2&0&0\\ 1&3&1&3&0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&3&1&0\\ 0&2&2&0&0\\ 0&2&-2&2&0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&3&1&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&-1&1&0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&3&1&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&-2&1&0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&3&1&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&0 \end{array}\right)$$ (3 pont)

Szabad paramétert kaptunk, tehát végtelen sok megoldás van. (1 pont)
Eszerint van a $\lambda = \kappa = \mu = \nu = 0$-tól különböző megoldás is, a négy oszlopvektor nem lineárisan független. (1 pont)

Ha valaki kiszámol egy megoldást, akkor persze nem kell megmagyaráznia, hogy jött rá:

Vegyük észre, hogy $4 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, (8 pont)
tehát a kérdezett vektorok nem lineárisan függetlenek, hiszen nemtriviális lineáris kombinációjukként megkapható a nullvektor. (2 pont)

4. A boltban árult háromféle müzli alkalmas összekeverésével 1 kg olyan müzlit szeretnénk készíteni, ami 10 dkg mazsolát, 50 dkg zabpelyhet, 10 dkg cerbonát és 30 dkg gyümölcsöt tartalmaz. A boltban árult egyik fajta müzli 20% mazsolát, 70% zabpelyhet, 0% cerbonát és 10% gyümölcsöt tartalmaz, míg a másik két fajtára ezek az arányok 20%, 40%, 20%, 20% ill. 0%, 10%, 40%, 50%. Kikeverhető-e a kívánt müzli, és ha igen, akkor mennyit használjunk az egyes típusokból?

Tegyük fel, hogy lehetséges a kívánt keverék, mégpedig az egyes típusokból rendre x, y és z dkg felhasználásával. Világos, hogy $x + y + z = 100$, hiszen 1 kg müzlit készítünk. (1 pont)
Az egyes összetevőkre is adódik egy-egy egyenlet, nevezetesen $0,2x+0,2y = 10$, $0,7x+0,4y+0,1z = 50$, $0,2y + 0,4z = 10$, valamint $0,1x + 0,2y + 0,5z = 30$. (2 pont)
A kívánt keverék pontosan akkor lehetséges, ha vannak olyan nemnegatív x, y és z számok, amikkel a fenti egyenletek mindegyike igaz. A kapott egyenletrendszert tehát az órán megismert Gauss-eliminációt alkalmazó módszerrel oldjuk meg. (2 pont)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 0,2&0,2&0&10\\ 0,7&0,4&0,1&50\\ 0&0,2&0,4&10\\ 0,1&0,2&0,5&30 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 2&2&0&100\\ 7&4&1&500\\ 0&2&4&100\\ 1&2&5&300 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 0&0&-2&-100\\ 0&-3&-6&-200\\ 0&2&4&100\\ 0&1&2&200 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 0&0&2&100\\ 0&3&6&200\\ 0&2&4&100\\ 0&1&2&200 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 0&1&2&200\\ 0&3&6&200\\ 0&2&4&100\\ 0&0&2&100 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&100\\ 0&1&2&200\\ 0&0&0&-400\\ 0&0&0&-300\\ 0&0&2&100 \end{array}\right).$$ (4 pont)

Tilos sort kaptunk (mindjárt kettőt is), és ez azt jelenti, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek. Tehát nem lehetséges a kívánt müzli kikeverése a három bolti típusból. (1 pont)

5. Legyen $\sigma : \{1, 2, \dots, 2n\} \to \{1, 2, \dots, 2n\}$ az a permutáció, amire $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $\sigma(i) = 2i$ ill. $j = n + 1, \dots, 2n$ esetén $\sigma(j) = 2j - n - 1$ teljesül. Határozzuk meg az $I(\sigma)$ inverziószámot.

A feladat hibásan lett kitűzve: $j > n$ esetén $\sigma(j) = 2j - 2n - 1$ a helyes definíció. Miután ezt kb 30 perc után kihirdettük, ha valaki az eredeti feladattal foglalkozott, és arról mutatta meg, hogy butaság, vagy részeredményt ért el abban, akkor vita esetén kérem, hozzám juttassátok el a dolgozatot. *FT*

Az inverziószám azon (i, j) párok száma, amire $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$ teljesül. (2 pont)
Világos, hogy ha $1 \le i, j \le n$, akkor i és j nem állnak inverzióban, (2 pont)
és ugyanez elmondható a $n + 1 \le i, j \le 2n$ esetre is. (1 pont)
Tehát ha $i < j$ és az (i, j) pár inverzióban áll, akkor $i \le n < j$ teljesül. (1 pont)
A σ permutáció definícójából adódóan $i = 1$ csak $j = n+1$-gyel áll inverzióban, $i = 2$ csak $j = n+1$-gyel és $j = n + 2$-vel, $i = 3$ kizárólag $j = n + 1, n + 2, n + 3$-mal, stb. (3 pont)
A keresett inverziószám tehát $I(\sigma) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. (2 pont)

6. Tegyük fel, hogy a 10×10 méretű A valós mátrix minden sorösszege és minden oszlopösszege egyaránt 10. Készítsük el a 11×11 méretű A' mátrixot úgy, hogy A-hoz jobbról hozzáírunk egy csupa 1-esekből álló oszlopot, majd a kapott mátrix alá írunk egy csupa 10-esből álló sort. Mutassuk meg, hogy $\det(A') = 0$.

Az órán azt tanították, hogy a determináns nem változik, ha az adott mátrix egyik sorát hozzáadjuk a mátrix egy másik sorához vagy kivonjuk belőle. (2 pont)
Vonjuk ki A' utolsó sorából az első sorát, majd a másodikat, a harmadikat, egészen az 10-dik sorig. Vizsgáljuk a kapott A'' mátrixot. (4 pont)
Mivel A minden oszlopösszege 10 volt, ezért A'' utolsó sorának első 10 eleme 0 lesz, (1 pont)
míg A'' jobb alsó mezejében pedig $10 - 10 \cdot 1 = 0$ fog állni. (1 pont)
Olyat is tanítottak, hogy ha egy négyzetes mátrix valamelyik sora csupa0, akkor a determinánsa is 0, (1 pont)
ezért $\det(A') = \det(A'') = 0$, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)