Bevezetés a számításelméletbe I.

1. pótZH javítókulcs (2012.05.07.)

Javított kiadás, Tamás Zsolt nyomán

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = 3, y = 2t, z = t - 5$ $(t \in \mathbb{R})$. Határozzuk meg e metszéspontját az origón átmenő, e-re merőleges S síkkal.

   Az e irányvektora $v = (0, 2, 1)$, (1 pont)
   és ez egyúttal S normálvektora is, hisz $S \perp e$. (1 pont)
   Ennek alapján S normálvektoros egyenlete $2y + z = 0$. (2 pont)
   Az e-t felírhatjuk két sík metszeteként a tanult módon, a t paraméter kifejezésével. (1 pont)
   Mivel v első koordinátája 0, ezért az egyik egyenlet $x = 3$ lesz, (1 pont)
   míg a másik $t = \frac{y}{2} = z + 5$ alapján $y - 2z = 10$-nek adódik. (2 pont)
   Az $2y + z = 0$ egyenletből z-t kifejezve $z = -2y$ lesz, amit az $y - 2z = 10$-be helyettesítve $5y = 10$, azaz $y = 2$ adódik. (1 pont)
   A keresett metszéspont koordinátái tehát $(x, y, z) = (3, 2, -4)$ lesznek. (1 pont)

2. Tartalmazza-e az $\underline{u} = (1, 0, 1, 1)$, $\underline{v} = (0, -1, 0, 1)$ és $\underline{w} = (1, 1, 3, 1)$ vektorok által generált altér az $\underline{x} = (2, -1, 4, 1)$ vektort?

   Tegyük fel, hogy $\lambda\underline{u} + \kappa\underline{v} + \mu\underline{w} = x$, azaz a $x \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$. (1 pont)
   Ez az egyes koordinátákra nézve azt jelenti, hogy az alábbi egyenlőségek mindegyik fennáll: $\lambda + \mu = 2, -\kappa + \mu = -1, \lambda + 3\mu = 4$ valamint $\lambda + \kappa + \mu = 1$. (2 pont)
   Pontosan akkor generálja $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ az $\underline{x}$ oszlopvektort, ha λ, κ és μ megválasztható úgy, hogy a fenti egyenlőségek mindegyike fennálljon. (1 pont)
   Azt kell tehát eldöntenünk, hogy a fenti egyenletrendszernek van-e megoldása. (1 pont)
   A kib.egyhómx Gauss-eliminációján keresztül, az órán tanult módon oldjuk meg a feladatot.

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$ (4 pont)

   Tilos sort kaptunk, tehát nincs megoldása az egyenletrendszernek, azaz $\underline{x}$-et nem generálja a 3 kérdezett oszlopvektor. (1 pont)

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy olyan bázisát, ami tartalmazza a $(2, 3, 4)$ vektort.

   Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3$ dimenziója 3, hisz a $B := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ vektorok egy bázist alkotnak. (2 pont)
   Elegendő tehát egy 3-elemű, a $(2, 3, 4)$ vektort tartalmazó G generátorrendszert megadni, hiszen ekkor G bizonyosan bázis lesz. (1 pont)
   A G pedig biztosan generátorrendszer, ha B mindhárom elemét generálja. (2 pont)
   A $G := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 3, 4)\}$ választásra ez teljesül, hiszen $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in \langle G \rangle$, ill. (2 pont)
   $(0, 0, 1) = \frac{1}{4}\left[(-2) \cdot (1, 0, 0) + (-3) \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (2, 3, 4)\right] \in \langle G \rangle$, (2 pont)
   tehát G bázis, és teljesíti a feladatban előírt tulajdonságot. (1 pont)

   Természetesen rengeteg más olyan bázis is van, ami tartalmazza a kérdéses vektort; pl a feladatban elsőként említett bázis bármely két eleme a kérdéses vektorral együtt bázist alkot.

4. Tegyük fel, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldásakor két szabad paraméter keletkezik. Előfordulhat-e, hogy az eredeti egyenletrendszer kibővíthető egy további egyenlettel úgy, hogy a kiegészített egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen?

Ahhoz, hogy egy egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen (azaz a megoldás egyértelműségéhez) az szükséges, hogy a Gauss-elimináció után minden oszlopban legyen vezéregyes, azaz, hogy ne keletkezzen szabad paraméter. (4 pont)
Ha egy egyenletet hozzáveszünk az eredeti rendszerhez, akkor ugyanazokat az elemi sorekvivalens átalakításokat elvégezhetjük, mint amiket az eredeti egyenletrendszer megoldása során elvégeztünk. Ekkor egy egy sorral kibővített redukált lépcsős alakot kapunk. (2 pont)
Ha ekkor az extra sorban kinullázzuk az eddigi vezéregyesek oszlopában álló elemeket, akkor az új sorban megjelenhet egy új vezéregyes valamelyik eddigi szabad paraméter oszlopában. (2 pont)
Ebben az oszlopban mindent ki tudunk nullázni további ESÁ-okkal, és alkalmas sorcserék után olyan RLA-t kapunk, amiben még mindig eggyel kevesebb a vezéregyesek száma az oszlopok számánál, tehát még mindig marad szabad paraméter, azaz semmiképp sem lehet a megoldás egyértelmű. (2 pont)

5. Legyen σ az $\{1,2,\ldots,2012\}$ számok permutációja, és legyen $i=1,2,\ldots,2012$ esetén
$$\pi(i)=\begin{cases}\sigma(i)+1 & \text{ha } \sigma(i)<2012\\ 1 & \text{ha } \sigma(i)=2012\,.\end{cases}$$
Tegyük fel, hogy $I(\sigma)=I(\pi)+13$. Határozzuk meg $\sigma(1000)$ értékét.

Jelölje t azt a számot az $\{1,2,\ldots,2012\}$ halmazban, amire $\sigma(t)=2012$. Mivel $i,j\neq t$ esetén $\pi(i)=\sigma(i)+1$ és $\pi(j)=\sigma(j)+1$, ezért i és j pontosan akkor áll inverzióban σ szerint, ha π szerint inverzióban állnak. (3 pont)
Az $I(\sigma)$ és $I(\pi)$ közti különbség tehát kizárólag abból adódik, hogy t más számokkal áll inverzióban σ szerint mint π szerint. (2 pont)
Konkrétan, $\sigma(t)=2012$ miatt t a σ permutáció szerint kizárólag a $t+1,t+2,\ldots,2012$ számokkal áll inverzióban, ezekből pedig szerint $2012-t$ van. (2 pont)
Mivel $\pi(t)=1$, ugyanez a t a π permutációban pontosan az $1,2,\ldots,t-1$ számokkal áll inverzióban, így $I(\pi)$-hez $t-1$ a t hozzájárulása. (1 pont)
A feladat feltételéből az következik, hogy $2012-t=t-1+13$, azaz $2t=2000$, ahonnan $t=1000$ adódik. (1 pont)
A t definíciója szerint tehát $\sigma(1000)=\sigma(t)=2012$. (1 pont)

6. Számítsuk ki az
$$A_p=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\2&2&5&3\\3&4&1&5\\0&2&4&p\end{vmatrix}$$
determináns értékét a p paraméter függvényében.

A megoldás során elemi sorekvivalens átalakításokat alkalmazunk. (1 pont)
Tudjuk, hogy csak a sorszorzás és a sorcsere változtatja ezek közül a determináns értékét, (1 pont)
utóbbi (-1)-szeresre. (1 pont)
$$A_p=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\2&2&5&3\\3&4&1&5\\0&2&4&p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&0&3&-7\\0&1&-2&-10\\0&2&4&p\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&1&-2&-10\\0&0&3&-7\\0&2&4&p\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&1&-2&-10\\0&0&3&-7\\0&0&8&p+20\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&1&-2&-10\\0&0&1&-\frac{7}{3}\\0&0&8&p+20\end{vmatrix}=$$
$$-3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&1&-2&-10\\0&0&1&-\frac{7}{3}\\0&0&0&p+\frac{116}{3}\end{vmatrix}=$$ (5 pont)
$=-3(p+\frac{116}{3})=-3p-116,$ (1 pont)
hisz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. pótZH javítókulcs (2012.05.07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ valamint $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Számítsuk ki az $X = A^{-1}BAB^{-1}$ szorzatmátrix determinánsát.

   Mivel $\det(A) = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1 \neq 0$ és $\det(B) = 4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -1 \neq 0$, ezért az A^{-1} és B^{-1} inverzmátrixok léteznek, értelmes a kiszámítandó kifejezés. (1 pont)
   A detereminánsok szorzástétele szerint $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$ teljesül minden $n \times n$ méretű mátrixra, (5 pont)
   és ebből adódik, hogy $\det(X) = \det(A^{-1}BAB^{-1}) = \det(A^{-1})\det(B)\det(A)\det(B^{-1}) =$ (2 pont)
   $\det(A^{-1})\det(A)\det(B)\det(B^{-1}) = \det(A^{-1}A)\det(BB^{-1}) = \det(I)\det(I) = 1 \cdot 1 = 1$. (2 pont)

   Természetesen teljes értékű az a megoldás is, ha kiszámítjuk az $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ill. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ inverzmátrixokat 2-2 pontért, majd újabb 4 pontért az $X = A^{-1}BAB^{-1} = \begin{pmatrix} -47 & 27 \\ 87 & -50 \end{pmatrix}$ szorzatot, végül pedig ennek a determinánsát 2 pontért. Igaz ugyan, hogy fáradságos, de az ember hihetetlen teljesítményre képes azért, hogy ne kelljen gondolkodnia.

2. Legyen A tetszőleges olyan $n \times n$ méretű felső háromszögmátrix, aminek a főátlójában minden elem egyes. Mutassuk meg, hogy A invertálható, és hogy az A^{-1} inverzmátrix szintén olyan felső háromszögmátrix, ami a főátlójában csak egyeseket tartalmaz.

   Az A mátrix inverzét az órán tanultak szerint úgy kaphatjuk meg, hogy melléírunk egy $n \times n$ méretű egységmátrixot, majd az így kapott $n \times 2n$ méretű mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ebben a bal oldalon az I_n jelenik meg, akkor a jobb oldali $n \times n$ méretű mátrix pontosan A^{-1} lesz. (3 pont)
   Jelen esetben a kapott $n \times 2n$ méretű mátrix már a kiinduláskor lépcsős alakú, tehát az RLA-hoz mindössze a vezéregyesek feletti elemeket kell kinullázni. (2 pont)
   Ezzel a bal oldalon megkapjuk a kívánt I_n egységmátrixot, a jobboldalon pedig kizárólag az egységmátrix egyesei felett fognak nemnulla elemek megjelenni. (3 pont)
   Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy A invertálható, és A^{-1} olyan felső háromszögmátrix, aminek a főátlójában kizárólag egyesek állnak. Ez pedig éppen a feladatbeli állítást bizonyítja. (2 pont)

   Avagy:

   Az A mátrix determinánsa (felső háromszögmátrix lévén) a főátlóbeli elemek szorzata, ami 1. (2 pont)
   Azt tanították, hogy egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0, (1 pont)
   tehát A invertálható. (1 pont)

3. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját.

   Az órán tanult módon járunk el: elemi sorekvivalens átalakításokkal lépcsős alakra hozzuk a mátrixot, megszámoljuk a vezéregyeseket, és ez adja a rangot. (4 pont)

   Lássuk csak: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4 pont)

   Lépcsős alakot kaptunk, amiben két vezéregyes van, a keresett rang tehát $r(A) = 2$. (2 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az A' mátrixot egy 5-rangú 10×7 méretű mátrixnak egy sorral és négy oszloppal történő kibővítésével kapjuk, akkor $\det A' = 0$.

   Ha egy mátrixhoz egy sort hozzáadunk, akkor a sorrangja legfeljebb eggyel nőhet. (2 pont)
   Ha az így kapott mátrixhoz négy további oszlopot csatolunk, akkor az oszloprangja ettől legfeljebb 4-gyel nőhet. (2 pont)
   Mivel a rang megegyezik a sorranggal és az oszlopranggal, (1 pont)
   ezért az A' mátrix rangja legfeljebb $5 + 1 + 4 = 10$ lehet. (2 pont)
   Azonban a rang a determinánsranggal is megegyezik, (1 pont)
   ezért $\det(A') = 0$-nak kell teljesülnie, (1 pont)
   hisz különben A' determinánsrangja 11 volna. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathcal{A}$ lineáris transzformációjára teljesül, hogy $\mathcal{A}(1,1,1) = (0,1,1)$, $\mathcal{A}(0,1,1) = (0,1,0)$, valamint, hogy $(0,1,0) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Írjuk fel a $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bázisban az $\mathcal{A}$ transzformáció mátrixát.

   Az órán azt tanították, hogy a lineáris transzformáció mátrixát adott bázisban felírva úgy kaphatjuk meg, hogy a bázisvektorok képeinek koordinátavektorait kell oszlopvektorokként egymás mellé írni a bázishoz tartozó sorrendben. (4 pont)
   Jelen esetben a bázis szerencsés választása folytán a koordinátavektor megegyezik a kérdéses vektor transzponáltjával, azaz a sorvektorból készített oszlopvektorral. Nincs hát másra szükségünk, mint a bázisvektorok képeinek meghatározására, amit a leképezés lineáris kombináció tartási tulajdonsága alapján teszünk meg, (1 pont)
   megfigyelve, hogy $(0,1,0) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ azt jelenti, hogy $\mathcal{A}(0,1,0) = (0,0,0)$. (1 pont)
   Ekkor $\mathcal{A}(0,0,1) = \mathcal{A}((0,1,1) - (0,1,0)) = (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0)$, (1 pont)
   ill. $\mathcal{A}(1,0,0) = \mathcal{A}((1,1,1) - (0,1,1)) = (0,1,1) - (0,1,0) = (0,0,1)$ (1 pont)
   A keresett mátrix tehát $[\mathcal{A}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)

6. Legyen A olyan $n \times n$ méretű négyzetes mátrix, aminek $\lambda = 3$ az egyik sajátértéke. Tegyük fel, hogy A sajátértékei megegyeznek $I_n - A$ sajátértékeivel (ahol I_n az $n \times n$ méretű egységmátrix). Határozzuk meg A egy további sajátértékét.

   Legyen v az A mátrixnak egy $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátvektora. Ekkor v az $I_n - A$ mátrixnak is sajátvektora, (2 pont)
   hiszen $(I_n - A) \cdot v = I_n \cdot v - A \cdot v = v - \lambda \cdot v = v - 3v = -2v$, (3 pont)
   és a hozzá tartozó sajátérték a $\lambda' = -2$. (2 pont)
   A feladat szerint $I_n - A$ minden sajátértéke egyúttal sajátértéke A-nak is, (1 pont)
   tehát A-nak a $\lambda = 3$-on kívül a $\lambda' = -2$ is sajátértéke. (2 pont)