Bevezetés a számításelméletbe II.

1. ZH javítókulcs

A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Akinek még nincs kartonja, tessék annak keresni. Ha nem lesz, akkor gyártani. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, részmegoldásért arányos részpontszám jár.

1. Létezik-e Euler-köre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf $L(K_{n,n})$ élgráfjának?

   Mivel $K_{n,n}$ bármelyik két éle között vezet élsorozat, ezért $L(K_{n,n})$ összefüggő. (2 pont)
   Az $L(K_{n,n})$ élgráf e élnek megfelelő csúcsának foka megegyezik az e-vel közös ponttal bíró, $K_{n,n}$-beli (e-től különböző) élek számával. (3 pont)
   Az e él mindkét színosztályban $(n-1)$ másik éllel szomszédos. Ezek az élek páronként különböznek, ezért az e-nek megfelelő csúcs foka az $L(K_{n,n})$ élgráfban $2(n-1)$. (3 pont)
   Azt kaptuk, hogy $L(K_{n,n})$ összefüggő és minden pontjának foka páros, ezért az órán tanult tétel szerint létezik Euler-köre. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak létezik hat különböző csúcsa azzal a tulajdonsággal, hogy akárhogyan festünk e hat pont közül hármat pirosra és színezzük a másik hármat zöldre, a piros pontokból zöld pontokba futó, belsőleg pontdiszjunkt utak maximális száma legfeljebb 5 lesz. (Két utat belsőleg pontdiszjunktnak mondunk, ha az esetlegesen egybeeső végpontjaiktól eltekintve nincsenek közös *belső* pontjaik.) Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton köre!

   Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy G-nek létezik egy C Hamilton-köre. (2 pont)
   A C körön végighaladva színezzük felváltva pirosra és zöldre a megadott hat pontot! (2 pont)
   A megadott pontok C-t hat ívre bontják fel, (2 pont)
   melyek hat, páronként belsőleg pontdiszjunkt, piros és zöld pont között vezető utat határoznak meg. (2 pont)
   Ez ellentmond a feladatbeli feltételnek, (1 pont)
   az indirekt feltevés tehát hamis, azaz G-nek csakugyan nincs Hamilton köre. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy G egy 2006 csúcsú, síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf komplementerének kromatikus számára $\chi(\overline{G}) \geq 400$ áll!

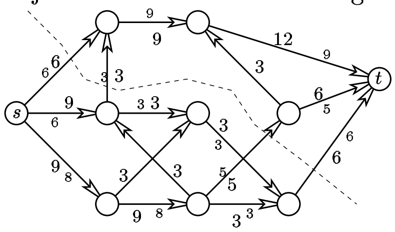
   Ha G síkbarajzolható, akkor az órán tanultak szerint G öt színnel színezhető. (2 pont)
   Lesz tehát olyan szín, amit legalább $2006/5 > 400$ pont színezéséhez használtunk fel. (2 pont)
   Ezek a pontok páronként összekötetlenek G-ben, (1 pont)
   tehát a $\overline{G}$ gráfban klikket alkotnak. (2 pont)
   Innen $\omega(\overline{G}) > 400$ adódik, (1 pont)
   vagyis $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) > 400$ teljesül. (2 pont)

4. Igaz-e, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyamérték 19? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)

   A maximális folyamérték megegyezik a minimális vágás értékével. (3 pont)
   Ha az 5 kapacitású él nincs benne egy minimális vágásban, akkor e vágásban csak 3-mal osztható kapacitású élek szerepelnek, azaz a vágásérték 3-mal osztható. (3 pont)
   Ha az 5 kapacitású él benne van egy minimális vágásban, akkor (mivel minden más kapacitás 3 többszöröse) a vágás értéke 3-mal osztva 2 maradékot ad. (3 pont)
   A 19-et 3-mal osztva 1 maradékot kapunk, ezért a minimális vágáskapacitás nem lehet 19, tehát a maximális folyamérték sem lehet ennyi. (1 pont)

   Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

   A javító utak módszerével meghatároztunk egy 20 értékű folyamot az ábrán látható módon.



(a kis számok a folyam által felvett értékeket jelentik.) (8 pont)
Tehát a maximális folyamérték legalább 20, vagyis *nem* 19. (2 pont)
(Mellesleg a maximális folyamérték pontosan 20, mégpedig a jelzett 20 kapacitású vágás miatt.) (0 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy $n \geq 4$ csúcsú, egyszerű, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-szeresen összefüggő gráf, akkor G-nek létezik Hamilton-köre. (Itt $\lceil x \rceil$ jelöli az x szám felső egészrészét, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely nem kisebb x-nél.)

   Ha G egy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-szeresen összefüggő gráf, akkor G tetszőleges, legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ csúcsának elhagyása után is összefüggő marad. (2 pont)
   Ezért G bármely v csúcsának fokszáma $d(v) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, (2 pont)
   hisz ha v nincs minden más csúccsal összekötve, akkor v szomszédait elhagyva a gráf szétesne. (2 pont)
   Teljesül tehát a Dirac tétel feltétele, azaz, hogy minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{2}$. (2 pont)
   A Dirac tétel szerint tehát G-nek létezik Hamilton-köre. (2 pont)

6. Tegyük fel, hogy a $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf A színosztálya a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pontokból áll, továbbá, hogy a v_i csúcs fokszámára $d(v_i) \geq i$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Mennyi a $\tau(G)$ értéke, azaz a G gráfban a lefogó pontok minimális száma?

   Megmutatjuk, hogy G-nek létezik A-t fedő párosítása, azaz $\nu(G) = k$. (2 pont)
   Innen $k = |A| \geq \tau(G) \geq \nu(G) = k$ alapján $\tau(G) = k$ következik, ami megválaszolja a feladat kérdését.(2 pont)
   (Nem annyira elegáns azt mondani, hogy
   „A Kőnig tétel szerint $\nu(G) = \tau(G)$, tehát inne $\tau(G) = k$ adódik.”, de ez is (2 pont))
   Az A-t fedő párosítás létezésének igazolásához a Hall tétel értelmében csupán a Hall-feltétel teljesülését kell ellenőriznünk, (1 pont)
   azaz azt, hogy tetszőleges $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X|$ áll-e. (1 pont)
   Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $|X| = l$. Mivel a $v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$ csúcsok száma $l-1$, ezért X tartalmaz olyan v_i csúcsot, melyre $i \geq l$. (2 pont)
   A feltevés szerint $|N(X)| \geq d(v_i) \geq i \geq l = |X|$, (1 pont)
   ezért a Hall-feltétel csakugyan teljesül, létezik tehát G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

   Az utolsó 6 pont a Hall tétel nélkül is megszerezhető.

   Válasszunk sorra a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsoknak egy-egy párt úgy, hogy bármely két csúcsnak különböző párt válasszunk! (2 pont)
   Ezt megtehetjük, mert amikor v_i-nek választunk párt, akkor $i-1$ előzőleg választott párt zárunk ki v_i szomszédai közül, (1 pont)
   azonban v_i-nek legalább $d(v_i) \geq i$ szomszédja van, (1 pont)
   tehát v_i-nek is tudunk az eddigiektől különböző párt találni. (1 pont)
   Csakugyan létezik tehát G-ben olyan párosítás, mely az A színosztály mindahány csúcsát fedi. (1 pont)

7. Tegyük fel, hogy a G gráfnak $n = 9999$ pontja van, legyen maximális fokszáma $\Delta(G) = 2006$, élkromatikus száma pedig $\chi_e(G) = 2006$ (más jelöléssel $\chi'(G) = 2006$). Bizonyítsuk be, hogy G-nek van 2006-nál kisebb fokszámú csúcsa!

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy G minden csúcsának a fokszáma 2006 ! (2 pont)
   Mivel G élei 2006 színnel színezhetőek, ezért G minden egyes csúcsából 2006-féle színű él indul ki. (2 pont)
   Ha tehát rögzítjük valamelyik (mondjuk a piros) színt, akkor azt kapjuk, hogy G minden egyes csúcsából indul ki piros színű él. (2 pont)
   A piros színű élek függetlenek, (1 pont)
   ezért G egy teljes párosítását alkotják. (1 pont)
   Azonban G-nek páratlan számú csúcsa van, nincs tehát teljes párosítása. (1 pont)
   A kapott ellentmondás az indirekt feltevés helytelenségét igazolja, tehát G nem 2006-reguláris, azaz létezik G-nek legfeljebb 2005-ödfokú csúcsa. (1 pont)

8. Legyen G_n az a gráf, amit úgy kapunk, hogy felosztjuk a $K_{n,n}$ teljes páros gráf egy uv élét, azaz töröljük uv-t és bevezetünk egy új x csúcsot, illetve az xu és xv éleket. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n számot, melyre G_n perfekt!

   Világos, hogy G_1 egy 3-pontú út, ami páros gráf, így perfekt. (1 pont)
   Különben $n \geq 2$ esetén létezik egy, a felosztott uv éltől diszjunkt wz éle $K_{n,n}$-nek. (1 pont)
   Ekkor $uvwz$ a $K_{n,n}$-ben egy C_4 kört alkot, (2 pont)
   ami feszített részgráf is, hisz (mondjuk) $uw, vz \notin E(K_{n,n})$. (2 pont)
   Az uv él felosztása után ebből a feszített C_4 körből G_n egy feszített C_5 körét kapjuk, (2 pont)
   amit perfekt gráf nem tartalmazhat. (1 pont)
   Tehát G_n pontosan $n = 1$-re lesz perfekt gráf. (1 pont)