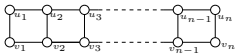
Bevezetés a számításelméletbe II.

1. ZH javítókulcs

A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek adminisztrálni, és idővel a kartonokra is bejegyezni.
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését: ennek feltétele az is, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása is kiderüljön a dolgozatból.
Természetesen az alább ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott részpontszámok járnak.

1. Legyenek a G gráf csúcsai az $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{100}, v_{100}$ pontok, élei pedig $u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_{100}v_{100}$, továbbá u_1u_2, $u_2u_3, \ldots, u_{99}u_{100}$, valamint $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{99}v_{100}$. Döntsük el, létezik-e G-nek Euler-köre, illetve Hamilton köre!



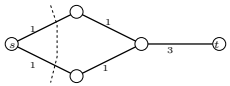
A G gráf a következőképpen néz ki: (3 pont)
Szemlátomást $u_1, u_2, \ldots, u_{100}, v_{100}, v_{99}, \ldots, v_2, v_1$ egy Hamilton kör. (2 pont)
Tehát G-nek létezik Hamilton köre. (1 pont)
Az u_2 csúcs fokszáma 3, ami páratlan. (2 pont)
A tanult tétel szerint tehát nincs G-nek Euler-köre. (2 pont)

(A G gráfot nem szükséges felrajzolni egy teljes értékű megoldáshoz.)

2. Létezik-e Hamilton köre a $K_{2006,2006}$ teljes páros gráf $L(K_{2006,2006})$ élgráfjának?

A $K_{2006,2006}$ gráf összefüggő (2 pont)
és minden pontjának foka 2006, (1 pont)
ami páros. (1 pont)
Az órán tanult tétel szerint tehát $K_{2006,2006}$-nak létezik Euler-köre, (2 pont)
ami meghatározza a $K_{2006,2006}$ éleinek egy ciklikus sorrendjét. Ugyanebben a sorrendben végigjárva az élgráf megfelelő csúcsait, annak éppen egy Hamilton-körét járunk végig. (3 pont)
Tehát létezik az $L(K_{2006,2006})$ gráfnak Hamilton köre. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy egy (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke k, és az a célunk, hogy ezt az értéket minél jobban leszorítsuk. Az egyetlen eszközünk erre, hogy a gráf egy tetszőleges élét törölhetjük (azaz kapacitását 0-vá tehetjük). Igaz-e, hogy optimális választás esetén mindig egy minimális st-vágásban található élt törlünk?



Rajzoltunk egy hálózatot: (5 pont)
Ebben bejelöltünk egy 2 kapacitású vágást, ezért a 3 kapacitású él nem lehet minimális vágásban. (2 pont)
(Egyébként könnyen látható, hogy van 2 értékű folyam is.) (a megoldás szempontjából nem érdekes, 0 pont)
A minimális vágásban tehát csak 1 kapacitású élek lehetnek. Egy ilyen élt törölve még mindig marad 1 értékű folyam, (1 pont)
míg a 3 kapacitású él törlésekor a maximális folyamérték 0-ra csökken. (1 pont)
Az optimális választás itt tehát egyértelműen a 3 kapacitású él megsemmisítése, tehát a feladat kérdésére „nem” a helyes válasz. (1 pont)

Megjegyzés: Igaz, hogy ha egy minimális vágásbeli e élt törlünk, akkor a maximális folyamérték az e él $c(e)$ kapacitásával csökken, ha pedig olyan f élt törlünk, amelyik nem szerepel minimális vágásban, akkor a csökkenés mértéke határozottan kisebb az f él $c(f)$ kapacitásánál (a csökkenés akár 0 is lehet). Mindez azonban nem jelenti azt, hogy a maximális mértékű csökkentés minimális vágás élének törlésekor adódik. Ha vki az első mondatbeli tényeket megállapítja, kapjon 4 pontot.

4. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban minden élkapacitás $\frac{3}{2}$ vagy $\frac{7}{4}$ vagy $\frac{9}{5}$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan maximális f folyam, ami minden élen egy egész szám huszadrészét veszi fel értékként!

Tekintsük a $(G, s, t, 20 \cdot c)$ hálózatot, melyben tehát minden kapacitás az eredeti érték hússzorosa. (2 pont)
Ebben a hálózatban a maximális folyamok úgy kaphatóak az eredeti hálózat maximális folyamaiból, hogy minden élen 20-szal megszorozzuk a folyam által felvett értékeket. (2 pont)
Figyeljük meg másfelől, hogy az új hálózatban minden kapacitás egész, (2 pont)
tehát az egészértékűségi lemma miatt létezik a maximális folyamok között egészfolyam is. (2 pont)
Ez a folyam tehát egy, az eredeti hálózatban maximális f folyam hússzorosa ami éppen a feladat által kívánt tulajdonságot teljesíti. (2 pont)

5. Legyen F egy 30-csúcsú fa, v pedig F egy tetszőleges csúcsa. Tegyük fel, hogy v-től 1, 2, 3, ill. 4 távolságra rendre $3, 7, 10$, ill. 9 csúcs található. Bizonyítsuk be, hogy F-nek nincs teljes párosítása!

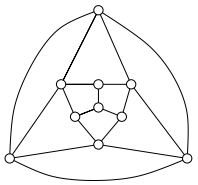
Minden fa (így F is) páros gráf. (2 pont)
Világos, hogy F minden v-vel szomszédos (azaz v-től 1 távolsára levő) csúcsa v-vel ellentétes színosztályba tartozik. (2 pont)
Ebből adódóan a v-től 2 távolságra levő csúcsok v-vel azonos, a 3 távolságra találhatóak v-étől különböző, végül pedig a 4 távolságra levők v-vel azonos színosztályba tartoznak. (2 pont)
A v-t nem tartalmazó színosztályba tehát $3 + 10 = 13$ csúcs tartozik. (2 pont)
A teljes párosítás létezésének szükséges feltétele, hogy a két színosztály mérete megegyezzék, azaz jelen esetben 15 legyen. (1 pont)
Ez nem teljesül, tehát F-nek nincs teljes párosítása. (1 pont)

(Igazából találtunk egy 13 méretű lefogó ponthalmazt, ahonnan $13 \geq \tau(F) = \nu(F)$ adódik, vagyis legjobb esetben is csak 13 élű párosítás található.)

6. Tegyük fel, hogy a G páros gráfra teljesül a következő. G csúcsainak bármely X részhalmazára igaz, hogy az X halmaz pontjainak (és az X-beli pontokra illeszkedő éleknek) a törlésével keletkező $G - X$ gráf legfeljebb $|X|$ izolált pontot tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G-nek létezik teljes párosítása!

Legyenek G színosztályai A és B. A Frobenius tétel feltételeit fogjuk ellenőrizni, (1 pont)
azaz, hogy $|A| = |B|$ (1 pont)
és hogy $|N(X)| \geq |X|$ teljesül minden $X \subseteq A$ esetén. (1 pont)
Ha A pontjait elhagyjuk, akkor B minden pontja izolált pont lesz, ezért $|B| \leq |A|$, a B színosztály pontjainak elhagyásával pedig $|A| \leq |B|$ adódik. (2 pont)
Eszerint $|A| = |B|$. (1 pont)
Legyen most $X \subseteq A$ tetszőleges. Ha elhagyjuk az X-beli pontok szomszédainak $N(X)$ halmazát, akkor ezáltal minden X-beli pont izolált ponttá válik. (3 pont)
A feltétel szerint tehát $|N(X)| \geq |X|$, és éppen ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

7. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát!



Ha G-t sikerült kiszínezni, akkor a három „külső” pont színe páronként különböző lesz, tehát legalább 3 színre van szükség. (2 pont)
Színezzük tehát ezeket a pontokat háromféle színnel, és próbáljuk meg csupán ezeknek a színeknek a felhasználásával kiszínezni az egész gráfot! Három olyan kiszínezetlen pont van, melynek van színezett szomszédja, ezeknek a pontoknak a színe nem lehet azonos egyik kiszínezett szomszéd színével sem, tehát kötelezően a harmadik lehetséges színt kapják. (2 pont)
Ismét van három olyan pontunk, amit nem színeztünk még ki, de mindegyiknek van már két különböző színűre színezett szomszédja, tehát ezen pontok színe is meghatározott. (2 pont)
A középső pontnak ekkor mindhárom szomszédja ki lesz színezve, ráadásul különböző színekkel. (1 pont)
Ez azt mutatja, hogy 3 szín nem elég G pontjainak kiszínezésére. (1 pont)
Ha azonban a középső pont egy negyedik színt kap, akkor G pontjainak egy jó színezését kapjuk. (1 pont)
A fentiek szerint G nem színezhető három színnel, néggyel azonban igen, tehát $\chi(G) = 4$. (1 pont)

Ha valaki pusztán talál egy 4-színezést, és kijelenti, hogy $\chi(G) \leq 4$ (vagy azt, hogy $\chi(G) = 4$), az kapjon 3 pontot.

8. Legyenek a G gráf csúcsai a k körvonal $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ívei, és két csúcs között akkor fusson él, ha a megfelelő ívek metszik egymást. Igaz-e, hogy G az ívek tetszőleges választása esetén perfekt gráf?

A k körvonalon megadhatóak az $I_1, I_2, \ldots, I_5$ körívek úgy, hogy $I_1 \cap I_5 \neq \emptyset$ legyen, és ezen kívül csak a fenti felsorolásban szomszédos körívek messék egymást. (4 pont)
Az ezen ívek által meghatározott G gráf a C_5 körrel izomorf, (2 pont)
ami nem perfekt. (3 pont)
A feladat kérdésére tehát „nem” a helyes válasz. (1 pont)