

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. ZH javítókulcs

FONTOS!!! A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Ha még nincsenek kartonok, tessék azokat legyártani. Akik megszerezték az aláírást, azoknak a listáját mihamarabb méltóztassatok Katának átadni. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

Egy λ skalár pontosan akkor lesz sajátérték, ha λ gyöke a karakterisztikus polinomnak, (2 pont)

azaz, ha $0 = \det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 5 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ (2 pont)

$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$ (az utolsó sor szerint kifejtve) (2 pont)

$= (1-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(4-\lambda) - 3 \cdot 2) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 2)$ (2 pont)

Eszerint λ pontosan akkor sajátérték, ha $\lambda = 1$ (1 pont)

vagy ha (a másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint) $\lambda = \frac{1}{2}(6 \pm 2\sqrt{7})$ (1 pont)

Ha valaki megtalálja a $(0, 0, 1)$ sajátvektort, és megállapítja, hogy ez a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik, akkor kapjon 2 pontot.

2. Mennyi a számossága a természetes számok 100-elemű részhalmazaiából álló halmaznak?

Legyen A a vizsgált halmaz. Világos, hogy $|A| \geq \aleph_0$, hisz már az $\{i, i+1, \dots, i+99\}$ típusú (vagy, ha úgy tetszik, az $\{1, 2, \dots, 99, n\}$ típusú) halmazokból annyi van, mint $\aleph$ számossága, azaz megszámlálhatóan végtelen. (2 pont)

Bebizonyítjuk, hogy $|A| \leq \aleph_0$, azaz megadunk egy leképezést, mely A elemeihez különböző természetes számokat rendel. (2 pont)

Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_{100}$ különböző prímek. Az A halmaz egy tetszőleges $\{n_1, n_2, \dots, n_{100}\}$ eleméhez rendeljük a $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_{100}^{n_{100}}$ természetes számot. (3 pont)

A prímfelbontás egyértelműsége miatt különböző részhalmazokhoz különböző számokat rendeltünk, (1 pont)

ezért A számossága legfeljebb annyi, mint $\aleph$ -é, vagyis megszámlálhatóan végtelen. (1 pont)

A Cantor-Bernstein tétel miatt A számossága pontosan $\aleph_0$, azaz megszámlálhatóan végtelen. (1 pont)

Ugyancsak természetes lehetőség a 100-elemű részhalmazok sorbarendezésére az alábbi:

Mindazon 100-elemű részhalmazok száma, amiknek legnagyobb eleme n , véges. (2 pont)

Rakjuk sorba ezen véges halmazok elemeit külön-külön. (Ez lehetséges.) (2 pont)

majd egyszerűen tegyük őket egymás után az utolsó elemek szerint növekvő sorrendben. (4 pont)

Ezzel sorbarendeztük A elemeit, vagyis $|A| = \aleph_0$. (2 pont)

Természetesen teljes értékű az a megoldás is, amelyik más bijekciót mutat egy ismert megszámlálhatóan végtelen halmazzal. További lehetőség annak bizonyítására, hogy $|\binom{\aleph}{100}| \leq \aleph_0$, ha minden egy $\{n_0, n_1, \dots, n_{99}\}$ halmazhoz egy olyan természetes számot rendelünk, melynek a 100-zal osztva i maradékot adó helyiértékeken álló jegyeinek kiolvasása éppen n_i -t adja (esetleges 0-kat írva még a szám elé).

3. Egy 52-lapos, csupa különböző lapból álló kártyacsomagban összesen 4 ász található. Hányféleképpen osztható szét a csomag 4 különböző játékos között úgy, hogy mindegyik játékosnak ugyanannyi lap jusson, és mindegyik játékosnál legyen egy-egy ász?

A 4 ász 4!-féleképp osztható szét. (2 pont)

Minden egyes ász kiosztáshoz ki kell választanunk a maradék kártyák szétosztását a 4 játékos között. (1 pont)

Az 1. játékos 48 lapból kap 12-t, amit $\binom{48}{12}$ -féleképp tudunk megtenni, (2 pont)

a 2. játékos a maradék 36 lapból $\binom{36}{12}$ -féleképp kaphat, (2 pont)

hasonlóan a 3. és 4. játékosok számára $\binom{24}{12}$ ill. $\binom{12}{12}$ lehetőség közül kell választanunk. (1 pont)

Mivel a döntések függetlenek, ezért az összes lehetőség száma $4! \cdot \binom{48}{12} \cdot \binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12}$ lesz. (2 pont)

Egy másik lehetőség a 48 lap elosztására az alábbi.

Az ászok kiosztása után rakjuk sorba a maradék 48 lapot. Minden kiosztásnak megfelel ezután egy 48-hosszú sorozat, mely 12 db 1-es, 12 db 2-es, 12 db 3-as és 12 db 4-es tartalmaz, amik azt jelzik, hogy az adott lap melyik játékoshoz kerül. (3 pont)

Tehát azt kell megszámlálni, hogy 12 – 12 db 1-es, 2-es, 3-as ill. 4-es hányféleképp rakható sorba. (2 pont)

Ez egy ismétléses permutáció, melyre a lehetőségek száma a tanultak szerint $\frac{48!}{12!^4}$ lesz. (1 pont)

Mivel minden ászelosztáshoz ennyi kiosztás tartozik, ezért a végeredmény $\frac{4! \cdot 48!}{12!^4}$ (2 pont)

4. Lehetséges-e, hogy G egy egyszerű, nem összefüggő, 10-csúcsú gráf, és a csúcsainak fokszámai rendre 7, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1?

Tegyük fel, hogy G ilyen. Ekkor a hetedfokú pont egy legalább 8-pontú K komponensben van benne. (2 pont)

Tehát K vagy 8-pontú, vagy 9-pontú. (1 pont)

Ha K 8-pontú, akkor a K -n kívüli két pont mindegyikének legfeljebb 1 a fokszáma, de nincs két ilyen pont. (2

(2 pont)

(2 pont)

- (2 pont)

(7 pont)

(1 pont)

- (2 pont)

(1 pont)

(2 pont)

(1 pont)

(2 pont)

(2 pont)

(1 pont)

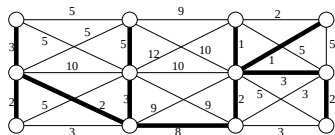
(2 pont)

(1 pont) Eszerint $4 \cdot 16 = 64$ olyan

(1 pont)

(1 pont)

- (2 pont)



(7 pont)

(1 pont)

- (3 pont)

(3 pont)

(3 pont)

(1 pont)