Bevezetés a számításelméletbe I.

1. ZH javítókulcs

A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$ egy 100-adik egységgyök.

   Azt kell igazolni, hogy $(\overline{\varepsilon}\varepsilon')^{100} = 1$ (2 pont)
   Tudjuk, hogy $\varepsilon^{10} = 1$ és $\varepsilon'^{25} = 1$ (3 pont)
   Innen $\overline{\varepsilon}^{10} = \overline{\varepsilon^{10}} = \overline{1} = 1$, (2 pont)
   tehát $(\overline{\varepsilon}\varepsilon')^{100} = \overline{\varepsilon}^{100}\varepsilon'^{100} = (\overline{\varepsilon}^{10})^{10}(\varepsilon'^{25})^4 = 1^{10} \cdot 1^4 = 1$, (2 pont)
   tehát $\overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$ csakugyan egy 100-adik egységgyök. (1 pont)

2. Legyenek $u, v \in \mathbb{R}^4$ tetszőleges vektorok. Vektorteret alkotnak-e (a szokásos műveletekre) azok a 3×4 méretű valós mátrixok, melyek meghatározta lineáris leképezések magtere tartalmazza az u és v vektorokat?

   Azok a (3×4)-es A mátrixok alkotják a vizsgált halmazt, melyekre $Au = Av = \underline{0}$ áll. (3 pont)
   Ahhoz, hogy belássuk, hogy ezen mátrixok alteret alkotnak a (3×4)-es valós mátrixok vekterében, mindössze annyit kell igazolni, hogy a halmaz zárt a műveletekre, vagyis a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra. (2 pont)
   Legyenek tehát A és B ilyen mátrixok. Ekkor $(A + B)u = Au + Bu = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, és $(A + B)v = Av + Bv = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, tehát az összeadásra zárt a halmaz. (2 pont)
   Ha pedig A egy szóbanforgó mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár, akkor $(\lambda A)u = \lambda(Au) = \lambda\underline{0} = \underline{0}$ ill. $(\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda\underline{0} = \underline{0}$, tehát a skalárral való szorzás sem vezet ki. (2 pont)
   A vizsgált mátrixok tehát csakugyan vektorteret alkotnak. (1 pont)

3. Hány dimenziós vektorteret generálnak a legfeljebb 5-ödfokú valós polinomok vektorterében a $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1$, a $q(x) = 2x^5 + 6x^3 + 4$ és az $r(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 1$ polinomok?

   Az a feladat, hogy meghatározzuk a p, q, r polinomok között a lineárisan függetlenek maximális számát. (2 pont)
   Ehhez elegendő azt meghatározni, hogy koordinátavektoraik között legfeljebb hány lineárisan független található, (1 pont)
   azaz, meghatározni a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & -9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix sorrangját. (1 pont)
   Mivel a Gauss-elimináció nem változtat a (sor)rangon, ezért az a kérdés, hogy hány vezéregyese lesz a lépcsős alaknak. (1 pont)
   Nos: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & -9 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -9 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -9 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -9 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (4 pont)
   A sorrang 2, tehát a kérdéses polinomok egy kétdimenziós vektorteret generálnak. (1 pont)

4. Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ egy tetszőleges lineáris leképezés, és legyen W az U vektortér egy altere. Bizonyítsuk be, hogy ha $W \cap \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$, és $w_1, w_2, \ldots, w_k \in W$ lineárisan független vektorok U-ban, akkor az $\mathcal{A}(w_1), \mathcal{A}(w_2), \ldots, \mathcal{A}(w_k)$ vektorok lineárisan függetlenek V-ben.

   Legyen $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(w_i)$. Azt kell megmutatni, hogy ha $v = \underline{0}$, akkor $\forall \lambda_i \equiv 0$. (1 pont)
   A lineáris leképezés definíciója alapján $v = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i)$, (2 pont)
   azaz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. (2 pont)
   Másfelől $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i \in W$, (2 pont)
   így $W \cap \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$ miatt $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i = \underline{0}$. (1 pont)
   Mivel a w_i-k ftn-k, ezért csakugyan minden λ_i együttható 0. (2 pont)

5. Határozzuk meg a $21, 22, \ldots, 30, 11, 12, \ldots, 20, 1, 2, \ldots, 10$ permutáció inverziószámát! (A fenti permutáció úgy értendő, hogy i-hez a fenti sorozat i-edik elemét rendeljük, ahol $i = 1, 2, \ldots, 30$.)

Azt kell megszámolni, hogy a felsorolt 30 elem közül hány inverzióban álló párt lehet kiválasztani. (2 pont)
Mivel a permutáció három növekedő sorozat egymásutánja, (1 pont)
ezért két elem pontosan akkor áll inverzióban, ha az első elem az első tíz valamelyike, a második pedig a húsz utolsóból való, (2 pont)
vagy ha az első elem a középső tíz, a második pedig az utolsó tíz között van. (2 pont)
Az első típusból $10 \cdot 20 = 200$, míg a másdikból $10 \cdot 10 = 100$ pár található. (2 pont)
Az inverziószám tehát $200 + 100 = 300$. (1 pont)

6. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

(a.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és főátlójának minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det A$ is 4-gyel osztható.
(b.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első sorának minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det A$ is 4-gyel osztható.
(c.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első és utolsó sorának minden eleme páros, akkor $\det A$ 4-gyel osztható.
(d.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első sorának és utolsó oszlopának minden eleme páros, akkor $\det A$ 4-gyel osztható.

(a.): Nem igaz, ellenpélda pl. a $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ determináns. (2 pont)
(b.): Igaz, hiszen a determináns értéke 4-szerese annak a determinánsnak, melyet úgy kapunk, hogy az első sort 4-gyel végigosztjuk. (2 pont)
Az osztás után keletkező egész mátrix determinánsa egész, így az eredeti determináns értéke a 4 többszöröse. (1 pont)
(c): Nem igaz, ellenpélda pl. a (2) mátrix. (3 pont)
szintén elfogadható az alábbi válasz:
Igaz, hiszen a determináns értéke $2 \cdot 2 = 4$-szerese annak a determinánsnak, melyet úgy kapunk, hogy az első és utolsó sorokat 2-vel végigosztjuk. (2 pont)
Az osztás után keletkező egész mátrix determinánsa egész, így az eredeti determináns értéke a 4 többszöröse. (1 pont)
(Szóval ezt a részfeladatot jól elnéztük.)
(d): Nem igaz, ellenpélda pl. a $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ determináns. (2 pont)

7. Legyen $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$. Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 3\varepsilon & 4\varepsilon & 2\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 & 3\varepsilon^2 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ determináns értékét!

Felhasználva, hogy ε harmadik egységgyök, azaz, hogy $\varepsilon^3 = 1$, (2 pont)
a determinánsok ismert tulajdonságai alapján $\begin{vmatrix} 3\varepsilon & 4\varepsilon & 2\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 & 3\varepsilon^2 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \varepsilon \cdot \varepsilon^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$ (4 pont)
$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (8 - 14) - 3 \cdot (21 - 16) = 6 - 3 \cdot 5 = -9$ a középső sor szerint kifejtve. (4 pont)

8. Döntsük el, invertálhtató-e az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, adjuk meg az inverzét.

Elvégezzük az egységmátrixszal kibővített mátrix Gauss eliminációját. (2 pont)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (6 pont)

Tehát a mátrix invertálható, és inverze $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
Persze az inverz másképp is kiszámítható (pl előjeles aldeterminánsokkal), és nyilván az is tökéletes. Ha jó módszert választ a versenyző, az 2 pont, de minden elrontott mátrixelem (8 rontásig) -1 pont.