Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2004. november 4.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned} 2x+6y+z&=-6\\ 2x+11y+11z&=14\\ 4x+10y+cz&=-20\\ 2x+9y+(c+10)z&=6 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3. A c valós paraméter milyen értékeire

a) merőleges a $3x+cy+4z=7$ egyenletű sík a $12x-cy+16z=5$ egyenletű síkra;

b) metszi a $3x+cy+4z=7$ egyenletű sík a $12x-cy+16z=5$ egyenletű síkot?

4. A c valós paraméter milyen értékeire lesz az alábbi mátrix rangja a lehető legkisebb?

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 1\\ 6 & 18 & -3 & -4\\ 3 & 6 & 3c & c^2\\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

5. A 100×100-as A mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi (9801 darab) eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot!

6. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij}=\begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i\cdot j \text{ páros,}\\ 0, & \text{ha } i\cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát!

7. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{u}$ a V (tetszőleges) vektortér vektorai. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, de a $\underline{v}_1+\underline{u},\underline{v}_2+\underline{u},\ldots,\underline{v}_k+\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\underline{u}\in\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\rangle$.

8. Legyen A egy tetszőleges $m\times n$-es mátrix, B pedig egy olyan $n\times n$-es mátrix, amelyre $\det B=0$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(AB)<n$.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2004. december 9.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy ekkor $\underline{u} + \underline{v}$ nem sajátvektora $\mathcal{A}$-nak!

3. Végezzük el az alábbi műveletet és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$\sqrt[3]{\frac{1+3i}{3-i}}$$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$5\left(z^2 + (\overline{z})^2\right) = z(12 - 6i)$$

5. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amelynek legalább az egyik tagja betű?

6. Hányféleképpen választhatók meg az $x_1, x_2, \ldots x_{100}$ pozitív egészek úgy, hogy

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 2004$$

teljesüljön? (Két választást tehát különbözőnek tekintünk akkor is, ha csak a tagok sorrendjében különböznek.)

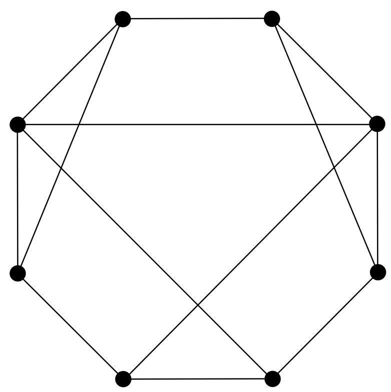
7. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V = \{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaz. Az $x, y \in V$, $x \neq y$ csúcsokat akkor kössük össze éllel, ha az alábbi két feltétel közül legalább az egyik teljesül:

(1) x és y közül mindkettő páros;

(2) $x+y$ 4-gyel osztva 3 maradékot ad.

Döntsük el, hogy a G gráf izomorf-e a saját komplementerével!

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!



Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótzárthelyi feladatok

2004. december 14.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 3y & - & z & - & 3w & = & -2 \\ 2x & - & 6y & + & 5z & + & 12w & = & 7 \\ 3x & - & 9y & + & 5z & + & cw & = & 9 \end{array}$$

2. a) A c valós paraméter milyen értékeire létezik inverze az alábbi A mátrixnak?
b) Határozzuk meg A inverzét a $c = 5$ értékre!

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & c \end{pmatrix}$$

3. Tükrözzük a $P(8, -3, 3)$ pontot a $7x - y + 2z = 11$ egyenletű síkra és határozzuk meg a tükörkép koordinátáit!

4. A c valós paraméter milyen értékeire lesz az alábbi mátrix rangja a lehető legnagyobb?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & c \end{pmatrix}$$

5. A 100×100-as A mátrix mellékátlójában (vagyis a jobb felső sarkot a bal alsóval összekötő átlóban) mindenhol 1-es áll, az összes többi eleme 0. Határozzuk meg az A^{101} mátrixot!

6. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme egy 3-mal osztva 1 maradékot adó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa osztható (3^{n-1})-nel!

7. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

8. Legyen M egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje A az M első 70 oszlopából álló, B pedig az M utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje X az M középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \geq \mathrm{r}(M) + \mathrm{r}(X).$$

Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótzárthelyi feladatok

2004. december 16.

1. Határozzuk meg a c valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi mátrixnak sajátértéke a $\lambda = 3$. Határozzuk meg a többi sajátértéket is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & c \end{pmatrix}$$

2. Legyen V tetszőleges, véges dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, melyre $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V$. Tegyük fel, hogy a V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \mathcal{A}(\underline{v}_2), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ vektorok szintén lineárisan függetlenek!

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$2i \cdot z^3 = (1+i)^8$$

4. Tetszőleges z komplex számra jelölje z^* azt a komplex számot, amit a komplex számsíkon z origó körüli, $+60°$-os (vagyis az óramutató járásával ellentétes irányú $60°$-os) elforgatásával kapunk. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2 = z^*$ egyenletet és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

5. Egy 8 fős társaság a moziban egy sorban ül le. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a sorban 9 szék van (amelyek közül 1 üresen marad)? (Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan ember, aki másik széken ül.)

6. 10 darab **A** betűből és 20 darab **B** betűből hány olyan betűsorozat készíthető, amelyben nincs két szomszédos **A** betű?

7. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pont van, ha a 3 fokú pontok száma 100?

8. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$ halmaz. Az $x, y \in V$, $x \neq y$ csúcsokat akkor kössük össze éllel, ha $|x - y| \leq 3$. Síkbarajzolható-e a G gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!