Bevezetés a számításelméletbe I.

2. pótZH javítókulcs

FONTOS!!! A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Ha még nincsenek kartonok, tessék azokat legyártani. Akik megszerezték az aláírást, azoknak a listáját mihamarabb méltóztassatok Katának átadni. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix által megadott lineáris transzformációját. Mennyi az A-hoz tartozó sajátvektorok számossága?

   Az R^2 térben a vektorok számossága megegyezik $\mathbb{R}^2$ számosságával, azaz kontinuum, (1 pont)
   legfeljebb ennyi tehát A sajátvektorainak számossa is. (1 pont)
   Megkeressük A sajátértékeit. (1 pont)
   Minden λ sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak, (2 pont)
   azaz $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 9$, (1 pont)
   Tehát a $\lambda = \pm 3$ az A sajátértékei. (1 pont)
   Ebből csak annyi fontos, hogy létezik sajátérték, és így létezik egy $\mathbf{0} \neq v$ sajátvektor is. (1 pont)
   Tudjuk, hogy v-nek minden skalárszorosa (kivéve a $\mathbf{0}$-t) sajátvektor, így a sajátvektorok számossága legalább $|\mathbb{R} \setminus \{0\}|$, azaz kontinuum. (1 pont)
   A Cantor-Bernstein tétel szerint tehát A sajátvektorainak számossága kontinuum. (1 pont)

2. Hány olyan 5×5 méretű mátrix létezik, aminek minden eleme 0 vagy 1 és amiben minden sorösszeg és minden oszlopösszeg 4-gyel egyenlő, egy-egy sor- és oszlopösszegtől eltekintve, amik egyaránt 5-tel egyenlőek?

   Ha egy sor- vagy oszlopösszeg 5, akkor az azt jelenti, hogy minden elem az adott sorban ill. oszlopban 1 . (1 pont)
   Ha egy sor- vagy oszlopösszeg 4, akkor az azt jelenti, hogy egy kivétellel minden elem az adott sorban ill. oszlopban 1 . (1 pont)
   Tehát ha elhagyjuk az 5-összegű sort és oszlopot, akkor egy olyan (4×4)-es 0/1 mátrixot kapunk, aminek minden sorösszege 3, (1 pont)
   azaz minden sorban három 1-es és egy 0 áll. (1 pont)
   Vagyis a négy 0 helyét kell úgy megválasztani, hogy minden sorból és minden oszlopból egyet-egyet válasszunk ki. (1 pont)
   Ha tehát a σ függvény mondja meg, hogy az i-dik sorból melyik $\sigma(i)$-dik helyen áll 0 a (4×4)-es mátrixban, akkor σ az $\{1, 2, 3, 4\}$ egy permutációja. (1 pont)
   Másfelől minden σ permutáció a négy 0 egy-egy különböző bástyaelhelyezésének felel meg, (1 pont)
   tehát ha már rögzítettük az (5×5)-ös mátrix elhagyott sorát és oszlopát, akkor 4! számú lehetőségünk van a mátrix kitöltésére. (1 pont)
   Mivel az elhagyott sort és oszlopot a közös elemük egyértelműen meghatározza, erre $5^2 = 25$ lehetőség kínálkozik. (1 pont)
   A keresett mátrixok száma tehát $25 \cdot 4! = 25 \cdot 24 = 600$. (1 pont)

3. Hány olyan sorrendje van 5 piros, 5 fehér, 5 zöld és 5 kék golyónak, amiben az 5 kék golyó mindegyike az első tíz hely valamelyikén van?

   Az 5 kék golyó helyét $\binom{10}{5}$-féleképp választhatom meg. (3 pont)
   Minden választás után el kell még helyeznem az $5 - 5$ piros, fehér és zöld golyót a maradék 15 helyen. (3 pont)
   Ez utóbbi feladat egy ismétléses permutáció, (1 pont)
   ezért $\frac{15!}{5!^3}$-féleképp oldható meg. (2 pont)
   A kérdezett sorrendek száma tehát $\binom{10}{5} \cdot \frac{15!}{5!^3}$. (1 pont)

4. Hány különböző k-pontú utat tartalmaz az n címkézett ponton megadott K_n teljes gráf? (Két utat akkor tekintünk azonosnak, ha ugyanazokat a csúcsokat és ugyanazokat az éleket tartalmazza.)

   Az utakat úgy készítjük el, hogy kiválasztjuk az első csúcsát, majd a másodikat, stb. (2 pont)
   Az első csúcsot n közül választjuk, a 2-t $n - 1$ lehetségeől, és így tovább, végül a k-dik csúcsra $n - k + 1$ a lehetőségek száma. (2 pont)
   A választások függetlenek, így szorozni kell, (1 pont)
   azonban minden utat pontosan 2-szer számoltunk meg, hiszen mindkét vége felől leszámoltuk, (1 pont)
   kivéve az egypontú utakat. (1 pont)
   Tehát a keresett utak száma n, ha $k = 1$ (1 pont)
   és $\frac{1}{2}n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{2(n-k)!}$, ha $1 < k \leq n$. (2 pont)

5. A 6-csúcsú G gráf pontjai közül 5-nek ismerjük a fokszámát. Ezek a fokszámok $4, 4, 2, 2, 1$. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!

Ha a gráfnak 4 izolált pontja van, amiből kettőn egy-egy, másik kettőn két-két hurokél van, míg a maradék két pont egy éllel van összekötve, akkor egy a feladat feltételeinek megfelelő, nem összefüggő gráfot kapunk.(8 pont)
Tehát a feladat állítása hamis, G nem feltétlenül összefüggő. (2 pont)

Persze, hogy nem erre gondoltam, amikor kitűztem. Ha vki rajön, hogy az egyszerűséget is oda kell gondolni, akkor az remek, így aztán az alábbi „megoldás” is elfogadható:

A gráf negyedfokú csúcsa egy legalább 5-pontú komponensben van benne. (3 pont)
Ha G nem lenne összefüggő, akkor volna egy 5-pontú komponense és egy izolált pontja. (2 pont)
Az izolált pont foka 0 lenne. (2 pont)
A fokszámösszegről tudjuk, hogy páros, (1 pont)
de így páratlan volna. (1 pont)
A kapott ellentmondás bizonyítja, hogy G csakugyan összefüggő. (1 pont)

6. Legyenek a G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_9$, és legyen a v_iv_j él költsége $(i+j)$-vel egyenlő! Határozzuk meg G minimális súlyú feszítőfájának Prüfer-kódját!

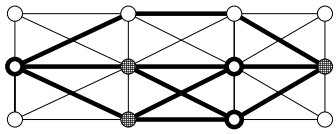
A G egy F feszítőfájának súlyát kiszámíthatjuk úgy is, hogy minden v_i-re összeadjuk a $d_F(v_i) \cdot i$ szorzatokat. (3 pont)
Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{9} d_F(v_i) = 2|E(F)| = 16$, (2 pont)
ezért a feszítőfa akkor lesz minimális súlyú, ha $\sum_{i=1}^{9} d_F(v_i) \cdot i - 16 = \sum_{i=1}^{9} (d_F(v_i) - 1) \cdot i$ minimális lesz. (2 pont)
Ez utóbbi mennyiség viszont éppen a Prüfer-kód jegyeinek összege, hiszen a kódban minden i éppen $(d_F(v_i) - 1)$-szer jelenik meg. (2 pont)
Tehát a minimális súlyú feszítőfa Prüfer-kódja $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ lesz. (1 pont)

Alternatív megoldás

Tekintsünk egy F feszítőfát, és annak egy v_1-től különböző v_i levelét! (Ilyen van, hiszen F-nek legalább 2 levele van.) (2 pont)
Ha v_i szomszédja nem v_1, akkor a v_i-ből induló élt törölve, és v_1-hez behúzva egy új élt egy másik feszítőfát kapunk, (2 pont)
aminek a súlya szigorúan kisebb, mint az előzőé. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy a minimális súlyú feszítőfa minden levele a v_1-ről lóg. (1 pont)
De ekkor a minimális súlyú feszítőfa csakis az lehet, amiben minden v_i-től egy-egy él fut v_1-be. (1 pont)
Ennek a fának a Prüfer-kódja $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, tekintve, hogy minden letörölt levél szomszédja v_1 volt (az utolsó kivételével). (3 pont)

(Ha valakinek a Prüfer-kód 8-jegyű, nem baj. (Persze csak ha a 8-dik jegy a 9.))

7. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



Tartalmaz $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot: (1 pont) (8 pont)
Ezért a Kuratowski tétel miatt nem síkbarajzolható. (1 pont)

8. Legyen G egy 13-pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere (tehát az a gráf, amiben két pont között pontosan akkor fut él, ha e pontok G-ben nem szomszédosak) közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.

Egy 13-pontú síkbarajzolható gráf élszáma legfeljebb $3 \cdot 13 - 6 = 33$ a tanultak szerint. (2 pont)
Eszerint G és komplementerének összélszáma legfeljebb $2 \cdot 13 = 66$ lehet ha mindkét gráf síkbarajzolható. (3 pont)
Tudjuk, hogy e két gráfnak együtt annyi éle van, mint a 13-pontú teljes gráfnak, (2 pont)
azaz $\binom{13}{2} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 6 \cdot 13 = 78$. (2 pont)
Ez ellentmondás, tehát nem lehet mindkét gráf síkbarajzolható. (1 pont)