Bevezetés a számításelméletbe I.

1. ZH javítókulcs

A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

1. Oldjuk meg a $z^4 = z$ egyenletet a komplex számok körében!

   Az egyenletet átírhatjuk $0 = z^4 - z = z(z^3 - 1)$ alakba, (2 pont)
   ami a ($z = 0$ vagy $z^3 - 1 = 0$) állítással ekvivalens. (3 pont)
   Utóbbi esetben $z^3 = 1$, ami pontosan azt jelenti, hogy z egy 3-dik egységgyök. (2 pont)
   A megoldás tehát a $z_1 = 0$, (1 pont)
   $z_2 = 1$, $z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ill. $z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 pont)
   (A kanonikus ill. trigonometrikus alakok közül elég az egyiket megadni.)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

   Elvégezzük a kibővített együtthatómátrix Gauss-eliminációját:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 28 \\ 1 & 5 & 9 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ (5 pont)

   A megoldás tehát: x_5 tetszőleges (valós), $x_4 = 2$, x_3 tetszőleges (valós), $x_2 = 2 - x_5 - 2x_3$ és $x_1 = 2 + 2x_5 + x_3$, (1+1+1+1+1 pont)

3. Határozzuk meg a három koordinátatengellyel vett metszéspontjait annak a síknak, mely átmegy a $(3,4,5)$ ponton és merőleges az origóból a $(3,4,5)$ koordinátájú pontba mutató vektorra!

   A sík normálvektorának koordinátái $(3,4,5)$, ezért egyenlete $3x+4y+5z = 3\cdot3+4\cdot4+5\cdot5 = 50$ lesz. (3 pont)
   Az x koordinátatengely pontjai azok, melyekre $y = z = 0$, amit behelyettesítve $3x = 50$ adódik, ahonnan $x = \frac{50}{3}$. (2 pont)
   Az y tengely pontjaira az $x = z = 0$ jellemző, ahonnan a tengelymetszetre $4y = 50$, azaz $y = \frac{25}{2}$ jön ki. (2 pont)
   Végül a z tengely első két koordinátája 0, vagyis $5z = 50$, tehát $z = 10$. (2 pont)
   A kérdéses sík az x, y és z koordinátatengelyeket tehát rendre az $(\frac{50}{3}, 0, 0), (0, \frac{25}{2}, 0)$ ill. $(0, 0, 10)$ pontokban metszi. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e az invertálható, (3×3)-as, valós mátrixok a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve!

   Világos, hogy I_3, a (3×3)-as egységmátrix invertálható, (1 pont)
   és $-I_3$ is az. (2 pont)
   Ha a kérdéses mátrixok vektorteret alkotnak, akkor $I_3 + (-I_3) = \underline{\mathbf{0}}$ is benne van ebben a vektrotérben. (3 pont)
   A nullmátrix azonban nem invertálható, (2 pont)
   ezért a kérdéses struktúra nem vektortér. (2 pont)

5. Legyen V egy 100 dimenziós, valós vektortér, és legyen ennek $\mathcal{A} : V \to V$ egy olyan lineáris transzformációja, melyre $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \geq \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ áll, illetve tetszőleges $v \in V$ vektorra $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathbf{0}$ teljesül. Határozzuk meg az $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ képtér dimenzióját!

   Ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathbf{0}\ \forall v \in V$, akkor $\mathcal{A}(v) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}\ \forall v \in V$, (2 pont)
   azaz $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ teljesül. (3 pont)
   Következésképp $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \leq \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$, (1 pont)
   ahonnan a $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \geq \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ feltétel miatt, $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ adódik. (1 pont)
   A dimenziótétel szerint $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \dim V = 100$, (2 pont)
   tehát $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = 50$. (1 pont)

6. Jelölje S_n az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációinak halmazát. Legyen $J(\sigma)$ azon párok száma, melyek nem állnak inverzióban a $\sigma \in S_n$ permutációban. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációhoz létezik egy olyan $\sigma' \in S_n$ permutáció, melyre $I(\sigma') = J(\sigma)$.

   Olyan σ'-t keresünk, melyben két elem pontosan akkor áll inverzióban, ha σ-ban nem állnak inverzióban. (2 pont)
   Legyen $\sigma'(i) := n - \sigma(i)$. (4 pont)
   Ez megfelelő, hisz egyrészt permutáció, (2 pont)
   másrészt $\sigma(i) < \sigma(j) \iff \sigma'(i) > \sigma'(j)$ (2 pont)
   Avagy:
   Világos, hogy $0 \leq J(\sigma) \leq \binom{n}{2}$. (1 pont)
   Szomszédos elemek cseréje 1-gyel változtatja $I(\sigma)$-t (2 pont)
   Szomszédos elemek cseréjének sorozatával el lehet jutni az identikus permutációból a fordított rendezésnek megfelelő permutációhoz, (3 pont)
   melyek inverziószáma 0 ill. $\binom{n}{2}$. (2 pont)
   Ezért a sorozatban lesz olyan σ' permutáció, mely inverziószáma $J(\sigma)$. (2 pont)

7. Határozzuk meg a $\begin{vmatrix} 20 & 40 & 10 & 70 & 40 & 23 \\ 30 & 0 & 50 & 60 & 11 & 30 \\ 20 & 40 & 10 & 77 & 40 & 20 \\ 40 & 40 & 99 & 30 & 30 & 30 \\ 40 & 45 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 11 & 30 & 30 & 30 & 30 & 50 \end{vmatrix}$ determináns 10-es számrendszerben felírt alakjának utolsó számjegyét!

   A determináns utolsó jegye meghatározható, ha megállapítjuk a 10-es maradékát (1 pont)
   és az előjelét. (1 pont)
   A determinánst a definíció szerint kifejtve minden kifejtési tag 10-zel osztható lesz, kivéve a mellékátlóbeli elemek szorzatát. (1 pont)
   A determináns 10-es maradékát tehát a mellékátlóhoz tartozó kifejtési mutatja meg. (1 pont)
   A mellékátlóbeli elemek szorzatának utolsó jegye 5, (1 pont)
   így függetlenül a mellékátlóhoz tartozó permutáció (amúgy ptn) inverziószámától (1 pont)
   a determináns 10-es maradéka szintén 5 lesz. (1 pont)
   Ha tehát a determináns pozitív, akkor 5-re végződik, (1 pont)
   míg, ha negatív, akkor 5 az utolsó jegye. (1 pont)
   Szerencsénk van: az utolsó jegy mindenképp 5 . (1 pont)

8. Döntsük el, invertálható-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, határozzuk meg az inverzét!

   A tanult módszer szerint a mátrixot kiegészítjük jobbról egy egységmátrixszal, és elemi sorekvivalens átalakításokkal redukált lépcsős alakra hozzuk: (2 pont)

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (6 pont)

   Tehát A invertálható, és inverze $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont)

   Persze az inverz másképp is kiszámítható (pl előjeles aldeterminánsokkal), és nyilván az is tökéletes. Ha jó módszert választ a versenyző, az 2 pont, de minden elrontott mátrixelem (8 rontásig) -1 pont.