

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. pótZH javítókulcs

A zh-k megbeszélése utáni végleges eredményeket legyetek szívesek a kartonokra bejegyezni. Akik megszerezték az aláírást, azokról legyetek szívesek Katának egy listát küldeni.

Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

- Határozzuk meg a z komplex szám abszolút értékét, ha z -re a $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$ egyenlet teljesül!
A z^2 -t ismeretlennek tekintve egy másodfokú egyenlettel állunk szemben, amire alkalmazhatjuk a jól ismert megoldóképletet. (3 pont)
Azaz $z^2 = \frac{1}{2} \cdot (-4 \pm \sqrt{16 - 20}) = \frac{1}{2}(-4 \pm 2i)$ (3 pont)
Tehát $z^2 = -2 \pm i$, ahonnan $|z^2| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. (2 pont)
Innen pedig $\sqrt{5} = |z^2| = |z|^2$ miatt $|z| = \sqrt[4]{5}$ adódik. (2 pont)
- Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2006-dimenziós V vektortéren, és legyen A az $\mathcal{A}$ leképezésnek egy B bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2000$, akkor $\det A = 0$ teljesül!
A dimenziótétel miatt $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2006$, (2 pont)
ahonnan $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2000$ miatt $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 6$ adódik. (1 pont)
Létezik tehát olyan nemnulla $\underline{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ vektor, amire $\mathcal{A}(\underline{v})$ a V vektortér nullvektora. (1 pont)
Ezért a $\underline{v}$ vektor $[\underline{v}]_B \neq \mathbf{0}$ koordinátavektorára $A[\underline{v}]_B = \mathbf{0}$ teljesül. (1 pont)
Világos, hogy $A[\underline{v}]_B$ az A mátrix oszlopainak a $[\underline{v}]_B$ vektor koordinátái szerint vett lineáris kombinációja. (1 pont)
Ez $[\underline{v}]_B \neq \mathbf{0}$ miatt egy *nemtriviális* lineáris kombináció, ami a $\mathbf{0}$ -t állítja elő, (1 pont)
tehát A oszloprangja kisebb, mint 2006. (1 pont)
Mínt hogy a determinánsrang és az oszloprang azonos, ezért $d(A) = o(A) < 2006$, (1 pont)
tehát $\det A = 0$ áll, hisz egyébként $d(A) = 2006$ volna. (1 pont)
- Legyen $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ és $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ két valós nemnulla vektor, az $n \times n$ -es A valós mátrix i -edik sorának j -edik eleme pedig legyen $u_i \cdot v_j$ minden szóba jövő i és j értékre. Állapítsuk meg az A mátrix rangját!
Az A mátrix i -dik sora éppen $u_i \cdot \underline{v}$ lesz, (2 pont)
azaz A bármely két sora egymás konstansszorososa. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy A bármely két sorvektora lineárisan összefüggő vektorrendszert alkot, (2 pont)
tehát A sorai között a lineárisan függetlenek maximális száma 1. (2 pont)
Más szóval A sorrangja $s(A) = 1$, (1 pont)
ami a tanultak szerint azt jelenti, hogy A rangja $r(A) = 1$. (1 pont)
- Legyenek A és B $n \times n$ -es valós mátrixok. Döntsük el, igaz-e, hogy ha egy λ valós szám A -nak és B -nek is sajátértéke, akkor sajátértéke az AB szorzatmátrixnak is. Arról is döntsük el, hogy igaz-e, hogy ha egy $\underline{v}$ vektor A -nak és B -nek is sajátvektora, akkor sajátvektora az AB szorzatmátrixnak is.
Ha $A = B = (2)$ (vagyis 1×1 -es mátrixokról van szó), akkor $\lambda = 2$ sajátértéke A -nak és B -nek is, de $AB = (4)$ (1×1 -es) mátrixnak már nem. (4 pont)
Tehát az első állítás hamis. (1 pont)
Másképp, ha $\underline{v}$ az A és B mátrixoknak is sajátértéke, akkor $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ és $B\underline{v} = \mu\underline{v}$ teljesül valamely λ, μ skalárookra. (1 pont)
Ezért $(AB)\underline{v} = A(B\underline{v}) = A(\mu\underline{v}) = \mu A\underline{v} = \mu(\lambda\underline{v}) = (\mu \cdot \lambda)\underline{v}$, (2 pont)
azaz $\underline{v}$ az AB szorzatmátrixnak (a $\lambda\mu$ sajátértékhez tartozó) sajátvektora, (1 pont)
vagyis a második állítás igaz. (1 pont)
Ha valaki az első rész megoldása helyett megállapítja, hogy az első kérdésre a válasz $\lambda \in \{0, 1\}$ esetén igaz, kapjon érte 1 pontot.
- Legyen G egy 6-pontú irányított gráf, azaz G minden éle az egyik végpontjából a másik végpontjába van irányítva. Tudjuk, hogy G pontjaiból rendre 4, 4, 3, 2, 1 ill. 0 él indul ki, és a v csúcs kivételével ismerjük a pontokba beérkező élek számát is: ezek csökkenő sorrendben 5, 3, 2, 1, 1. Határozzuk meg, hány él érkezik a v csúcsba!
Ha minden pontban összeadjuk az onnan kilépő élek számát, akkor az összeghez minden él hozzájárulása pontosan egy, (2 pont)
azaz éppen G élszámát kapjuk. (1 pont)
Tehát G -nek pontosan $4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 14$ éle van. (2 pont)
Hasonló igaz a pontokba belépő élszámok összegére is, (1 pont)
ezért $5 + 3 + 2 + 1 + 1 + d^{be}(v) = 14$, (3 pont)
ahonnan $d^{be}(v) = 2$ adódik a kérdéses élszáma. (1 pont)

6. Hány különböző módon tölthető ki egy 5 sorból és 20 oszlopból álló táblázat úgy, hogy benne az $1, 2, \dots, 100$ számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen, és az elemek értéke minden egyes sorban balról jobbra haladva monoton növekedjék?

Ha minden sorra meghatározzuk, hogy melyik számok kerülnek oda, akkor ezzel egyértelműen megadtuk a táblázat kitöltését, hiszen a sorokba az adott számokat monoton növekvően kell beírunk. (3 pont)

Tehát ki kell választani az 1., 2., ..., 5. sorokba kerülő számokat. (1 pont)

Az első sorba $\binom{100}{20}$ -féle választásom van. (1 pont)

A másodis sorba a maradék 80 számból választok, az eddigiektől függetlenül $\binom{80}{20}$ lehetőség közül. (2 pont)

És így tovább. Mivel a választások függetlenek, ezért a végeredmény a lehetőségek számának szorzata, (2 pont)

azaz $\binom{100}{20} \cdot \binom{80}{20} \cdot \binom{60}{20} \cdot \binom{40}{20} \cdot \binom{20}{20}$. (1 pont)

Az utolsó 6 pont az alábbiak szerint is megszerezhető.

Eszerint minden számra meg kell mondani, hogy hányadik sorba kerül, azaz 20 db 1-est, 20 db 2-est, ..., 20 db 5-öst kell 1-től 100-ig sorbarakni. (2 pont)

Ez egy ismétléses permutáció $n = 100$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 20$ paraméterekkel, (2 pont)

tehát a lehetőségek száma éppen $\frac{100!}{20!^5}$. (2 pont)

7. Legyen K teljes gráf az $1, 2, \dots, 100$ címkéjű csúcsokon az alábbi élsúlyokkal. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje legfeljebb 50, egy egység súlyúak. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje nagyobb, mint 50, két egység súlyúak. Az olyan élek súlya, amelyeknek egyik végpontcímkeje legfeljebb 50, a másik pedig nagyobb 50-nél, három egység súlyúak. Hány különböző, minimális súlyú feszítőfa adható meg a fenti módon élsúlyozott K gráfban?

A feszítőfának 99 éle van. (1 pont)

Az 1 súlyú élek az első 50 ponton körmentes gráfot alkotnak, ezért legfeljebb 49 lesz belőlük a fában. (1 pont)

Hasonló okból legfeljebb 49 db 2 súlyú él lesz a fában, ezért legjobb esetben is legalább $99 - 49 - 49 = 1$ db 3-súlyú élt kell használnunk. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy egy feszítőfa *pontosan akkor* minimális súlyú, ha tartalmazza az első 50 pontnak is, és a második 50 pontnak is egy-egy feszítőfáját, továbbá egy tetszőleges élt, ami az első 50 pont és a második 50 pont között vezet. (2 pont)

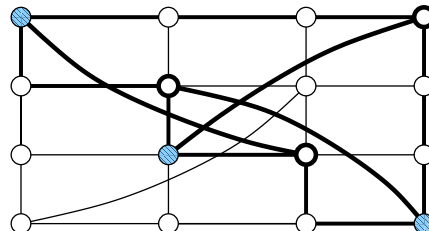
Tetszőleges minimális súlyú feszítőfa tehát úgy kapható meg, hogy függetlenül kiválasztjuk az első 50 ill. az utolsó 50 pontnak egy-egy tetszőleges feszítőfáját, majd egy további élt választunk a két fa közt. (1 pont)

Cayley tétele szerint a feszítőfát 50^{48} -féleképp választhatjuk, (2 pont)

a 3 súlyú él kiválasztására $50 \cdot 50$ lehetőség van, (1 pont)

tehát a kérdéses fák száma $50^{48} \cdot 50^{48} \cdot 50^2 = 50^{98}$ -nak adódik. (1 pont)

8. Síkbarajzolható-e az alábbi G gráf? (Ha igen, adjuk meg egy síkbarajzolását, ha nem, bizonyítsuk ezt be.)



G tartalmaz $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot:

Ezért a Kuratowski tétel miatt G nem síkbarajzolható.

(8 pont)

(2 pont)