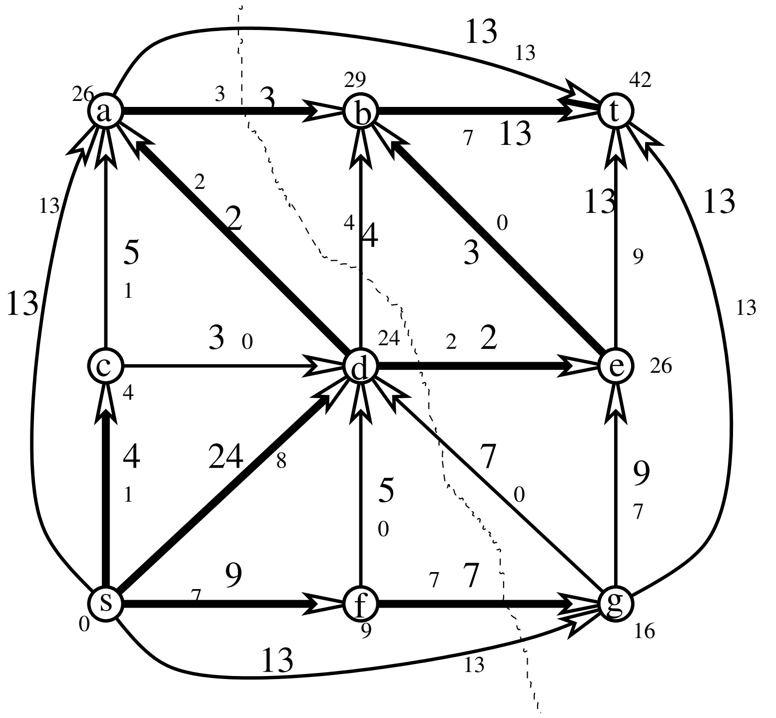
# Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév
**2. gyakIV javítókulcs**

Az eredményeket legyetek szívesek a (`fleiner@cs.bme.hu`) cimre küldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. Az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.




ábra

1. Az ábrán látható diagram segítségével megadott Pert problémában mennyi az összetett feladat végrehajtásához szükséges minimális idő, és mik a kritikus tevékenységek?

   Az tanult módszerrel (mindig forrást választva) meghatározhatóak a legkorábbi kezdési idők (a csúcsok melletti számok jelzik) és az azokat meghatározó (vastag) élek. (4 pont)
   A kritikus tevékenységek azok, melyek csupa vastag élből álló $st$ úton vannak. (3 pont)
   Ezek alapján az $a, b, d, e, s$ és $t$ tevékenységek kritikusak és a minimálisan szükséges idő 42. (3 pont)

2. Határozzunk meg az ábrán megadott hálózatban egy maximális $st$-folyamot, és állapítsuk meg a maximális $st$-folyam értékét.

   A javító utak módszerével találunk egy folyamot, amit az élekre írt kis számok határoznak meg. (4 pont)
   E folyam értéke 42. (2 pont)
   Azért nincs ennél nagyobb folyam, mert a szaggatott vonallal jelzett vágás kapacitása szintén 42. (3 pont)
   A válasz tehát 42. (1 pont)

3. Létezik-e olyan lépéssorozat a $8 \times 8$-as sakktáblán a huszárral, melyben a huszár minden lépést pontosan egyszer tesz meg? (Azaz ha egy $x$ mezőről a huszár egy $y$ mezőre léphet, akkor a lépéssorozatban pontosan egy olyan lépés lesz, mely $x$-ből $y$-ba vagy $y$-ból $x$-be vezet. A huszár egy lépésében egy $2 \times 3$ méretű téglalap egyik sarokmezejéből az átellenes sarokra ugrik.)

   Definiáljunk egy segédgráfot, melynek csúcsai a tábla 64 mezeje, él pedig akkor fut két csúcs közt, ha a huszár az egyik csúcsról a másikra léphet. (2 pont)
   Ha létezik a kívánt lépéssorozat, akkor a fenti segédgráfnak létezik Euler-útja. (2 pont)
   A 4 sarokmező 8 szomszédjának megfelelő gráfcsúcsok fokszáma egyaránt 3, (2 pont)
   ezért az Euler-bejárásokról tanult tétel szerint nem létezik a segédgráfban Euler-út, (3 pont)
   vagyis nincs a kívánt tulajdonsággal rendelkező lépéssorozat. (1 pont)

4. Képezzük a $H$ gráfot a $G = (A, B; E)$ páros gráfból úgy, hogy az $A$ színosztályra egy klikket illesztünk, azaz az $A$-beli pontpárokat összekötjük. Bizonyítsuk be, hogy $H$ perfekt.

   $H$ minden feszített részgráfja úgy jön létre, hogy egy páros gráf egyik színosztályára klikket illesztünk, (1 pont)
   ezért $H$ perfektségének igazolásához annyit kell bizonyítani, hogy minden, ilyen módon készített $H'$ gráfra $\chi(H') = \omega(H')$. (1 pont)
   Legyen $H'$ ilyen gráf, azaz a $G' = (A', B'; E')$ ps gráfban $A'$ pontjait összekötözgettük. (1 pont)
   $|A'| \leq \omega(H') \leq |A'| + 1$, hisz $A'$ klikk, és egy klikk $B'$-nek legfeljebb 1 pontját tartalmazhatja. (1 pont)
   Ha $\omega(H') = |A'| + 1$, akkor $A'$ pontjait különböző színekkel színezve, és $B'$ pontjainak egy újabb színt adva látjuk, hogy $\chi(H') \leq |A'| + 1 = \omega(H') \leq \chi(H')$, (2 pont)
   ha pedig $\omega(H') = |A'|$, akkor $B'$ minden pontjához van olyan $A'$-beli pont, amivel nincs összekötve. (2 pont)
   Tehát ha $A'$ pontjait különböző színekkel színezzük, akkor $B'$ minden pontjához választható egy szín, azaz $\chi(H') \leq$

$|A'| = \omega(H') \leq \chi(H')$. (1 pont)
Következésképp $\chi(H') = \omega(H')$, azaz $H$ csakugyan perfekt. (1 pont)

5. Oldjuk meg a $18x \equiv 16(64)$ kongruenciát, azaz határozzuk meg mindazon $x$ egészeket, melyekre igaz a kongruencia!

   2-tel (a modulust is) végiosztva ekvivalens átalakítást végzünk: $9x \equiv 8(32)$ . (2 pont)
   Mivel $(32, 3) = 1$, a 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás: $27x \equiv 24(32)$ , (2 pont)
   ami $-5x \equiv -8(32)$, azaz $5x \equiv 8(32)$ alakba írható. (1 pont)
   Mivel $(32, 7) = 1$, a 7-tel szorzás ekvivalens átalakítás: $35x \equiv 56(32)$, azaz $3x \equiv 24(32)$ (2 pont)
   Mivel $(32, 3) = 1$, bátran oszthatunk 3-mal: $x \equiv 8(32)$. (2 pont)
   Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért $x$ pontosan akkor megoldás, ha $x \equiv 8(32)$ . (1 pont)

6. Van-e olyan $n \neq 2005$ természetes szám, melyre $\varphi(n) = \varphi(2005)$ ?

   Tudjuk, hogy $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$, ahol $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ az $n$ kanonikus alakja. (2 pont)
   A $2005 = 5 \cdot 401$ kanonikus alakból (1 pont)
   $\varphi(2005) = 4 \cdot 400 = 1600$ . (1 pont)
   A $1600 = 2^6 \cdot 5^2$ kanonikus alak (1 pont)
   alapján az $n$ minden $p$ prímosztójára $p - 1 \mid 1600$, teljesül. (1 pont)
   Ezért az 1600 14 osztója közül csak az $1, 2, 4 = 2^2, 16 = 2^4, 10 = 2 \cdot 5, 40 = 2^3 \cdot 5, 100 = 2^2 \cdot 5^2, 400 = 2^4 \cdot 5^2, 1600 = 2^6 \cdot 5^2$ jön szóba $p - 1$-ként. (1 pont)
   Innen adódik, hogy $\varphi(1601) = 1600$, $\varphi(401 \cdot 5) = \varphi(2005) = 1600$, $\varphi(401 \cdot 3 \cdot 4) = \varphi(4812) = 1600$, $\varphi(101 \cdot 17) = \varphi(1717) = 1600$, $\varphi(101 \cdot 5 \cdot 8) = \varphi(4040) = 1600$, $\varphi(41 \cdot 5 \cdot 11) = \varphi(2255) = 1600$, $\varphi(41 \cdot 25 \cdot 3) = \varphi(3075) = 1600$, $\varphi(11 \cdot 25 \cdot 2^4) = \varphi(4400) = 1600$ az összes olyan természetes szám, melyre $\varphi(n) = 1600$. (2 pont)
   A kérdésre tehát igen a válasz. (1 pont)
   Megj.: ha vki már egy 2005-től különböző számot talál a fentiek közül, belátja, hogy jó, és igennel válaszol, az teljes pontszámot ér.

7. Legyen $H$ a 92-elemű $G$ csoport olyan részcsoportja, mely nem ciklikus és nem normálosztó $G$-ben. Mennyi a $H$ rendje?

   $H$ nem normálosztó, ezért $H \neq G$, (1 pont)
   és $H$ nem ciklikus, tehát $H \neq \{e\}$ . (1 pont)
   $H$ eszerint valódi részcsoport, aminek a Lagrange-tétel miatt a rendje 92 egy valódi osztója. (2 pont)
   $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$, ezért $H$ rendje $2, 4, 23$, vagy 46 lehet. (1 pont)
   $|H| = 2$ ill. $|H| = 23$ esetén $H$ ciklikus, hisz rendje prím. (2 pont)
   $|H| = 46$ esetén $H \trianglelefteq G$, hisz $H$ indexe 2. (2 pont)
   Vagyis az egyedüli lehetséges eset a $|H| = 4$. (1 pont)

8. Egy alulfinanszírozott egyetemi tanszéken a következő, szellemes költségmegtakarítási módszert találták ki. Úgy állítják össze az órarendet, hogy szerdánként egyáltalán ne legyenek órák, egyúttal az oktatók szerdánként egyöntetűen és önként fizetés nélküli szabadságot vesznek ki. Tegyük fel, hogy a termek kellő számban állnak a tanszék rendelkezésére. A heti órarend elkészítésekor tehát csupán az kell meghatározni, hogy a hét adott napjának adott órájában mely oktatók mely szakokat oktatják. Minden oktató számára adott, hogy hetente hány órában kell tanítania az egyes szakokat. A megkötés, hogy az érdekvédelmi szervezetekkel való megállapodás miatt minden oktató naponta legfeljebb 7 órát tarthat, és egy hallgatónak minden nap legfeljebb 7 órája lehet. Elkészíthető-e a 4 napra sűrített órarend, ha a tanszék 8 oktatójának heti összóraszáma 10, 10, 8, 11, 7, 15, 13, 16, illetve az egyes szakoknak a tanszék hetente 18, 22, 27 ill. 23 órát tart?

   Készítsünk egy páros gráfot, melynek egyik színosztályának csúcsai a 8 oktatónak, a másik színosztály pedig a 4 szaknak felel meg, egy oktató és egy szak között futó élek száma pedig a heti óraszám, melyben az oktató az adott szakot tanítja. (2 pont)
   A tanítás minden óráját a gráf egy párosítása írja le. (1 pont)
   A gráfban a fokszámok 22, 22, 20, 23, 19, 27, 25 ill. 28 az oktatóoldalon, 18, 22, 27 ill. 23 a szakoldalon. (1 pont)
   A Kőnig tétel miatt a gráf élei 28 színnel színezhetőek. (3 pont)
   Az 1-7 színek határozzák meg a hétfői, a 8-14 színek a keddi, a 15-21 színek a csütörtöki, míg a 22-28 színek a pénteki órarendet határozzák meg. (2 pont)
   Tehát lehetséges a feladat által kívánt feltételeknek megfelelő órarend elkészítése. (1 pont)