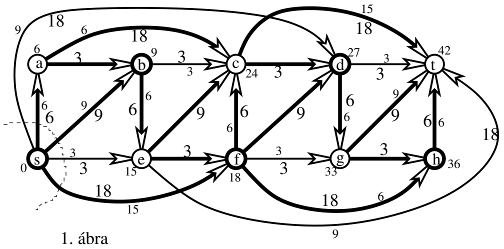
Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév
1. gyakIV javítókulcs

Az eredményeket legyetek szívesek emailben elküldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. (`fleiner@cs.bme.hu`) Persze az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.



1. ábra

1. Hány élét kell törölni az 1. ábrán látható gráf irányítatlan megfelelőjének, hogy keletkező gráf tartalmazzon Euler-kört?

   A gráf ptn fokú pontjai s, a, e, d, h és t. (2 pont)
   Mivel minden éltörlés két pont fokszámát csökkenti, ezért legalább 3 élt kell törölni ahhoz, hogy minden pont fokszáma ps legyen, ami szükséges az Euler-kör létezéséhez. (2 pont)
   Mivel a fenti pontok közül a csak s-sel, h pedig csak t-vel van összekötve, továbbá d és e összekötetlen, ezért 3 él törlése nem elegendő. (2 pont)
   4 él törlésével viszont megoldható a feladat: ha töröljük sa, ht, ec és cd éleket, akkor minden pont foka páros lesz, (2 pont)
   és a gráf is összefüggő marad, (1 pont)
   tehát létezik Euler-köre. Vagyis a kérdésre 4 a válasz. (1 pont)

2. Az 1. ábrán látható diagram segítségével megadott Pert problémában mennyi az összetett feladat végrehajtásához szükséges minimális idő, és mik a kritikus tevékenységek?

   Az tanult módszerrel (mindig forrást választva) meghatározhatóak a legkorábbi kezdési idők (a csúcsok melletti számok jelzik) és az azokat meghatározó (vastag) élek. (4 pont)
   A kritikus tevékenységek azok, melyek csupa vastag élből álló st úton vannak. (3 pont)
   Ezek alapján minden tevékenység kritikus és a minimálisan szükséges idő 42. (3 pont)

3. Határozzunk meg az 1. ábrán megadott hálózatban egy maximális st-folyamot, és állapítsuk meg a maximális st-folyam értékét!

   A javító utak módszerével találunk egy folyamot, amit az élekre írt kis számok határoznak meg. (4 pont)
   E folyam értéke 42. (2 pont)
   Azért nincs ennél nagyobb folyam, mert a szaggatott vonallal jelzett vágás kapacitása (az s-ből kifutó éleken a kapacitásösszeg) szintén 42. (3 pont)
   A válasz tehát 42. (1 pont)

4. Legyen a G gráf kromatikus száma $\chi(G) = 5$, és legyen F a G egy feszítőfája. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G - F) \geq 3$, ahol a $G - F$ gráfot úgy kapjuk, hogy töröljük G-ből F éleit.

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy $\chi(G - F) \leq 2$. (2 pont)
   Az F fa nem tartalmaz (ptn) kört, így páros, azaz $\chi(F) \leq 2$. (2 pont)
   Tehát $V(G)$-n van két színezésünk, melyek két-két színt használnak. (2 pont)
   E színezés a $V(G)$ egy 4-színezését indukálja, amikoris két pontot akkor színezünk ugyanarra a színre, ha mindkét fenti színezésben ugyanazt a színt kapják. (2 pont)
   A kapott 4-színezésben G minden élének végpontjai különböző színt kapnak, hisz F élei az egyik, $G - F$ élei a másik kiindulási színezésben lesznek kétszínűek. (1 pont)
   Eszerint $\chi(G) \leq 4$, ami ellentmondás. Ezzel az állítást igazoltuk. (1 pont)

5. A G irányítatlan gráf pontjainak U részhalmaza klikket feszít, azaz bármely két különböző U-beli pont G-ben szomszédos. Illesszünk $V(G) \setminus U$-ra klikket, azaz az összes összekötetlen $V(G) \setminus U$-beli pontpárt kössük össze (és őrizzük meg G eredeti éleit is). Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező G' gráf perfekt!

   Vegyük észre, hogy a G' gráf $\overline{G'}$ komplementerében U és $V(G) \setminus U$ egyaránt független halmazok, (2 pont)
   azaz él csak U és $V(G) \setminus U$ között fut $\overline{G'}$-ben. (1 pont)
   Ezért $\overline{G'}$ páros gráf, (1 pont)
   tehát perfekt. (3 pont)
   A $\overline{G'}$ perfekt gráf komplementere G', (1 pont)
   ami Lovász tétele miatt szintén perfekt. (2 pont)

6. Hány olyan $n \in \mathbb{N}$ szám, melyre $\phi(n) = 42$?

   Ha $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor $\phi(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$ (2 pont)
   Tehát a $\phi(n) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ kanonikus alakjában minden tényező vagy az n szám egy prímtényezője, vagy valamelyik

$(p_i - 1)$-nek a prímtényezője. (3 pont)
Ha a 7 prímtényező az n kanonikus alakjából való prím, akkor a $7 - 1 = 6 = 2 \cdot 3$ is osztója $\phi(n)$-nek, de ekkor nem marad más prímtényező, ezért $n = 7^2 = 49$, és $\phi(49) = (7-1) \cdot 7 = 42$, valóban. (2 pont)
Ha 7 valamelyik $p_i - 1$ prímosztója, akkor $(p_i - 1)$-re a lehetőségek $7, 14, 21, 42$, amiből csak a $p_i = 43$ a prím. Ekkor tehát $n = 43$, és $\phi(n) = 43 - 1 = 42$. (2 pont)
A feladat kérdésére tehát 2 a válasz. (1 pont)

7. Oldjuk meg a $25x \equiv 30(60)$ kongruenciát!

5-tel (a modulust is) végiosztva ekvivalens átalakítást végzünk: $5x \equiv 6(12)$. (3 pont)
Mivel $(12, 5) = 1$, az 5-tel szorzás ekvivalens átalakítás: $25x \equiv 30(12)$, (3 pont)
ami $x \equiv 6(12)$ alakba írható. (2 pont)
Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért x pontosan akkor megoldás, ha $x \equiv 6(12)$. (2 pont)

8. Legyen H a 92-elemű G csoport olyan részcsoportja, mely nem ciklikus és nem normálosztó G-ben. Mennyi a H rendje?

H nem normálosztó, ezért $H \neq G$, (1 pont)
és H nem ciklikus, tehát $H \neq \{e\}$. (1 pont)
H eszerint valódi részcsoport, aminek a Lagrange-tétel miatt a rendje 92 egy valódi osztója. (2 pont)
$92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$, ezért H rendje $2, 4, 23$, vagy 46 lehet. (1 pont)
$|H| = 2$ ill. $|H| = 23$ esetén H ciklikus, hisz rendje prím. (2 pont)
$|H| = 46$ esetén $H \trianglelefteq G$, hisz H indexe 2. (2 pont)
Vagyis az egyedüli lehetséges eset a $|H| = 4$. (1 pont)