

Gyakorlás
ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET
8. gyakorlat
2024.

1. Ketten játszanak két kupac kavicsal. Az egyik kupacban n_1 , a másikban n_2 darab kavics van, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$. A soron következő játékos vagy elvesz az egyik, általa választott kupac valamennyi, de legalább egy darab kavicsot, vagy pedig mind a két kupacból elvesz ugyanannyi, de legalább egy darab kavicsot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni. Határozzuk meg minden $n_1, n_2 \in \{1, 2, \dots, 6\}$ esetén az (n_1, n_2) állás Grundy-számát.
2. A táblára felírtunk egy pozitív egész számot. Két játékos felváltva lép. A soron következő játékos átírja a táblán lévő n számot $(n-1)$ -re vagy $\lfloor n/2 \rfloor$ -re. Az a játékos veszít, aki az 1-et írja fel. Kinek van nyerő stratégiája?
3. Legyen adott egy $n \in \mathbb{N}_+$ szám. Két játékos felváltva lép. A soron következő játékos az $\{1, \dots, n\}$ halmaznak egy olyan részhalmazát mondja, amely nem részhalmaza semmilyen korábban említett halmaznak sem. Az a játékos veszít, aki az $\{1, \dots, n\}$ halmazt mondja. Bizonyítsuk be, hogy a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
4. Adottak a $\mathcal{H}_1 = (V_1, \mathcal{E}_1)$ és $\mathcal{H}_2 = (V_2, \mathcal{E}_2)$ hipergráfok a diszjunkt V_1 és V_2 halmazokon, melyekre $\sum_{E \in \mathcal{E}_1} 2^{-|E|} < 1/2$ és $\sum_{E \in \mathcal{E}_2} 2^{-|E|} < 1/2$ teljesül. Két játékos felváltva lép. A soron következő játékos kiválaszt egy (korábban még egyik játékos által sem választott) csúcsot vagy a $\mathcal{H}_1$, vagy a $\mathcal{H}_2$ hipergráfból. A kezdőjátékos akkor nyer, ha megépíti a $\mathcal{H}_1$ egy hiperélét, a második játékos pedig akkor, ha megépíti akár a $\mathcal{H}_1$, akár a $\mathcal{H}_2$ egy hiperélét. Kinek van nemvesztő stratégiája?
5. Iterált eliminálás segítségével keressünk egy kevert Nash-egyensúlyt az alábbi stratégiai játékban.

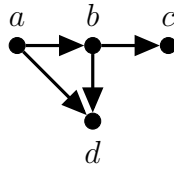
	X	Y	Z
A	$(2, 3)$	$(-1, 0)$	$(-1, 2)$
B	$(3, -1)$	$(-2, 2)$	$(0, 2)$

6. Tekintsük az alábbi nyereségmátrixszal rendelkező kétszemélyes, 0-összegű mátrixjáték.
 - (a) Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.
 - (b) Határozzuk meg a Pareto-optimális stratégiaválasztásokat.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Két játékos „fogócskázik” az alábbi irányított gráfon. A játékosok kiválasztják a gráf egy-egy csúcsát. Ha mindkét játékos ugyanazt a csúcsot választotta, akkor a fogó két petákat kap a másik játékostól. Ha a fogó által választott csúcsból vezet irányított él a másik játékos csúcsába, akkor a fogó 1 petákat kap a másik játékostól. Minden más esetben a fogó fizet a másik játékosnak 1 petákat.
 - (a) Írjuk fel a fogó nyereségmátrixát.
 - (b) Írjuk fel a fogó maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
 - (c) Írjuk fel a másik játékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.

- (d) A fogó azt tervezi, hogy rendre $6/13$, $3/13$, $4/13$, 0 valószínűségekkel választja az a , b , c és d csúcsokat, a másik játékos pedig $4/13$, 0 , $6/13$, $3/13$ valószínűséggel választja ugyanezeket a csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ezzel mindketten egy maximin stratégiát választottak.
- (e) Melyik játékosnak kedvez a játék?



8. Három játékos osztozik arányosan a $[0, 1[$ intervallumon a Fink-eljárás segítségével. A játékosok a sorszámuk szerinti növekvő sorrendben érkeztek, és hogy minden vágás műveletnél a lehető legbalrább vágta. Tudjuk, hogy az első játékos értékelő eloszlásfüggvénye $f_1(x) = x$ és hogy ő az eljárás végén egy $[a, b[\cup [c, d[$ alakú részt kapott, ahol $0 \leq a < b < c < d \leq 1$. Határozzuk meg a , b , c és d összes lehetséges értékét.
9. Három játékos osztozik arányosan a $[0, 1[$ intervallumon. Minden játékos minden vágás műveletnél a lehető legbalrább vág. Döntsük el, hogy az alábbi eljárások használatával kaphatott-e valamelyik játékos egy $[a, b[\cup [c, d[\cup [e, f[$ alakú részt kapott, ahol $0 \leq a < b < c < d < e < f \leq 1$.
- (a) Fink-eljárás (b) Tasnádi-eljárás
(c) a mozgó késes eljárás diszkrét változata (d) Even–Paz-eljárás
10. Három hitelező osztozik egy 100-nagyságú vagynonon. A hitelezők összkövetelése 200. Tudjuk, hogy a hitelezők $x_1 = 10$, $x_2 = 30$, illetve $x_3 = 60$ fabatkát kaptak. Előfordulhatott-e ez
- (a) az arányos, (b) a hierarchikus,
(c) az egyenletes nyereség, (d) az egyenletes veszteség,
(e) a kelmeszabály-konzisztens
- szétosztási szabályok szerinti szétosztás esetén? Amelyik esetben igen, ott határozzuk meg a hitelezők követeléseinek összes lehetséges értékét.