

# Stabil és népszerű párosítások

## ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

### 14. gyakorlat

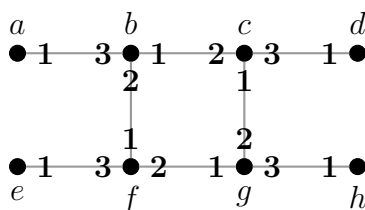
2024.

1. Mutassuk meg, hogy a ponthatárnövelő, illetve a ponthatárcsökkentő algoritmus nem taktikázásbiztos sem a felvételizők, sem az egyetemek részéről.
2. Adott hallgatók egy halmaza, akik kurzusokat vehetnek fel. Minden hallgatóhoz adott, hogy legfeljebb hány kurzust választhat, és minden kurzushoz tartozik egy létszámkorlát. Minden hallgató esetében adott egy szigorú preferenciarendezés az őt érdeklő kurzusok halmazán, valamint az is, hogy ezek felvételéhez mekkora pontszámmal rendelkezik. Adjunk hatékony algoritmust stabil ponthatárhúzás meghatározására.
3. Határozzunk meg az alábbi páros gráfokban egy-egy maximális élszámú népszerű párosítást a Kavitha-algoritmus segítségével. A táblázatok sorai a fiúknak, az oszlopai a lányoknak felelnek meg, és a mezőkben szereplő első számok a fiúk preferenciáit, a második számok pedig a lányok preferenciáit jelentik.

|       | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f_1$ | 2./1. | 1./1. | –     | –     |
| $f_2$ | –     | 1./2. | 3./2. | 2./2. |
| $f_3$ | –     | –     | 2./1. | 1./1. |
| $f_4$ | –     | –     | –     | 1./3. |
| $f_5$ | –     | –     | –     | 1./4. |

|       | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f_1$ | 1./4. | –     | –     | –     |
| $f_2$ | 1./3. | –     | 2./2. | –     |
| $f_3$ | 1./1. | 2./1. | –     | –     |
| $f_4$ | 2./2. | 3./2. | 1./3. | –     |
| $f_5$ | –     | –     | 1./1. | 2./1. |

4. Bizonyítsuk be, hogy a Kavitha-algoritmus nem taktikázásbiztos a lányok szempontjából.
5. Legyen  $G = (A, B; E)$  egy páros gráf és tetszőleges  $v \in V(G)$  esetén legyen  $\prec_v$  egy szigorú preferenciarendezés, valamint tegyük fel, hogy  $M \subseteq E$  egy teljes párosítás. Adjunk meg egy olyan  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvényt, hogy egy minimális összsúlyú teljes párosítás meghatározásának segítségével el tudjuk dönteni, hogy  $M$  népszerű a  $G$ -beli teljes párosítások között.
6. Mutassuk meg, hogy páros gráfokban a népszerű párosítás keresési feladat visszavezethető egy népszerű teljes párosítás keresésére.
7. Határozzuk meg az összes népszerű párosítást az alábbi páros gráfban.



8. Mutassuk meg, hogy a párosítások körében a népszerűség nem tranzitív reláció.
9. Legyen  $G = (A, B; E)$  egy páros gráf és tetszőleges  $v \in V(G)$  esetén legyen  $\prec_v$  egy szigorú preferenciarendezés. Legyen  $M \subseteq E$  a Gale–Shapley-algoritmus kimenete abban az esetben, amikor az  $A$ -beli csúcsok a kérők, valamint legyen  $N \subseteq E$  egy tetszőleges párosítás. Legyen továbbá  $A_N \subseteq A$  azon  $A$ -beli csúcsok halmaza, akik az  $N$  szerinti párjukat jobban kedvelik az  $M$  szerintinél. Tegyük fel, hogy  $A_N \neq \emptyset$ .

- (a) Tegyük fel azt is, hogy az  $A_N$ -beli csúcsok  $M$  szerinti párjainak halmaza nem azonos az  $N$  szerinti párjaik halmazával. Legyen  $b \in B$  egy olyan csúcs, akinek az  $N$  szerinti párja  $A_N$ -ben van, de az  $M$  szerinti párja nem. Legyen  $a \in A$  a  $b$  csúcs  $M$  szerinti párja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $a \notin A_N$  és az  $ab$  él blokkolja  $N$ -et.
- (b) Tegyük fel most azt, hogy az  $A_N$ -beli csúcsok  $M$  szerinti párjainak halmaza megegyezik az  $N$  szerinti párjaik halmazával. Legyen ez a csúcshalmaz  $B_0$ . Legyen  $b \in B_0$  az a csúcs, amelyiket a  $B_0$ -beli csúcsok közül utoljára kérte meg egy  $A_N$ -beli csúcs a Gale–Shapley-algoritmus futása során. Bizonyítsuk be, hogy ezen kérés beérkezése miatt  $b$  visszautasított egy  $a \in A \setminus A_N$  csúcsot. Bizonyítsuk be továbbá, hogy az  $ab$  él blokkolja  $N$ -et.

10. Bizonyítsuk be, hogy a lánykérő algoritmus a fiúk részéről taktikázásbiztos.