

Újraosztási feladatok és stabil párosítások

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

12. gyakorlat

2024.

1. Tekintsük az újraosztási feladat azon általánosítását, amiben a lakástulajdonosok több lakással is rendelkezhetnek és úgy akarjuk újraosztani a lakásokat, hogy ne legyenek olyan tulajdonosok, akik képesek lennének lakásokat cserélni egymás között úgy, hogy mindegyikük legalább annyira „jól járjon”, mint korábban, de valaki szigorúan „jobban járjon”, ahol is ezt a következőképpen értjük.

Tegyük fel, hogy egy k darab lakással rendelkező tulajdonos eredeti lakásai a preferenciasorrendjében az i_1 -edik, $\dots$, i_k -edik helyet foglalták el, ahol $i_1 < \dots < i_k$, az újraosztás után kapott lakásai pedig a preferenciasorrendjében az j_1 -edik, $\dots$, j_k -edik helyet foglalták el, ahol $j_1 < \dots < j_k$. Azt mondjuk, hogy ez a tulajdonos szigorúan jobban járt az újraosztással, ha $(i_1, \dots, i_k) \leq (j_1, \dots, j_k)$ és $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$.

Adjunk hatékony algoritmust a feladat megoldására, ha minden tulajdonosnak szigorú preferencia-rendezése van a lakások halmazán.

2. Tekintsük az újraosztási feladat azon általánosítását, amelyben minden lakástulajdonos egy lakással rendelkezik, de bizonyos lakások ugyanabban a társasházban találhatók, és az ilyen lakások teljesen egyenlőek minden tulajdonos preferenciarendezésében, az azonos lakásokat leszámítva viszont szigorúak a preferenciarendezések. Úgy akarjuk újraosztani a lakásokat, hogy ne legyenek olyan tulajdonosok, akik képesek lennének lakásokat cserélni egymás között úgy, hogy mindegyikük a saját preferenciasorrendje szerint legalább olyan jó lakást kapjon, mint az eredeti lakása volt, de valaki szigorúan jobbat kapjon.

Adjunk hatékony algoritmust a feladat megoldására.

3. Határozzunk meg az alábbi páros gráfokban egy-egy stabil párosítást a Gale–Shapley-algoritmus segítségével. A táblázatok sorai a fiúknak, az oszlopai a lányoknak felelnek meg, és a mezőkben szereplő első számok a fiúk preferenciáit, a második számok pedig a lányok preferenciáit jelentik.

	l_1	l_2	l_3
f_1	2./1.	1./2.	3./1.
f_2	1./3.	3./3.	2./3.
f_3	1./2.	2./1.	3./2.

	l_1	l_2	l_3
f_1	2./1.	1./2.	3./3.
f_2	3./2.	1./3.	2./1.
f_3	3./3.	2./1.	2./2.

	l_1	l_2	l_3	l_4
f_1	2./2.	3./2.	1./4.	–
f_2	–	1./3.	–	–
f_3	3./4.	2./1.	–	1./1.
f_4	–	1./4.	2./2.	3./3.
f_5	2./1.	–	1./3.	–
f_6	2./3.	–	3./1.	1./2.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
f_1	2./3.	1./2.	–	–	3./1.
f_2	–	3./1.	–	1./3.	2./2.
f_3	–	1./3.	2./2.	3./1.	–
f_4	2./2.	–	–	1./2.	–
f_5	3./1.	–	2./1.	–	1./3.

4. Mutassuk meg, hogy a lányok szempontjából a lánykérő algoritmus nem taktikázásbiztos.
5. Mutassuk meg, hogy a fiúk szempontjából a lánykérő algoritmus nem csoportos taktikázásbiztos.
6. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $b : V \rightarrow \mathbb{N}$ egy fokszámkorlát. Egy $M \subseteq E$ élhalmazt, amiben minden $v \in V$ csúcs esetén $d_M(v) \leq b(v)$ teljesül, b -párosításnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy M b -párosítás b -dominál egy $e \in E$ élt, ha létezik olyan $v \in V$ csúcs és olyan különböző $m_1, m_2, \dots, m_{b(v)} \in$

M élek, hogy minden $i \in \{1, \dots, b(v)\}$ esetén $m_i \prec_v e$ teljesül. Egy M b -párosítást stabilnak nevezünk, ha M pontosan az $(E - M)$ -beli éleket dominálja.

Adjunk algoritmust stabil b -párosítás keresésére páros gráfokban.

7. Bizonyítsuk be, hogy a $K_{n,m}$ teljes páros gráfban tetszőleges preferenciákra nézve minden stabil párosítás lefedi a nemnagyobbik színosztályt.
8. Tekintsünk egy n -csúcsú teljes gráfot, melynek éleit az $1, 2, \dots, \binom{n}{2}$ számokkal számoztuk meg. Minden csúcs a minél kisebb sorszámmal rendelkező éleit preferálja jobban. Mutassuk meg, hogy ekkor pontosan egy stabil párosítás van, és ez a párosítás legfeljebb egy csúcsot nem fed le.
9. A „barátságos békák” játékban adott a síkon n darab pont úgy, hogy bármely két pontpár távolsága különböző – ezek a pontok egy tó tavirózsáinak helyét jelölik. A játékban két játékos lép felváltva a következő szabályok szerint. A kezdőjátékos az első lépésben kiválaszt egy tavirózsát és rátesz egy békát. Ezután a másik játékos választ egy, az előzőtől különböző tavirózsát és szintén rátesz egy békát. Innentől minden lépésben a soron következő játékos választ egyet a két béka közül és áthelyezi azt egy másik tavirózsára úgy, hogy a két béka közötti távolság szigorúan csökkenjen, de a két béka nem kerülhet ugyanarra a tavirózsára. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.
 - (b) Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
10. A „színes barátságos békák” játék a következőkben tér el az eredeti játéktól. Minden tavirózsa levele vagy világoszöld vagy sötétzöld. A kezdőjátékos az első lépésében letesz egy világoszöld békát egy világoszöld levelű tavirózsára, a másik játékos pedig egy sötétzöld békát egy sötétzöld levelű tavirózsára. Innentől minden játékos csak a saját békájával léphet csak az azonos színű tavirózsákra. A játék többi szabálya változatlan. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
11. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája a „barátságos békák” játék betli változatában, azaz amiben az a játékos veszít, aki az eredetiben nyert volna?