

Aukciók és újraosztási feladatok

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

11. gyakorlat

2024.

1. Tekintsünk egy olyan második áras árverést, melynek során $k \in \mathbb{N}_+$ darab azonos tárgyat árverezünk el. A nyertes az a k játékos lesz, akik a k legmagasabb nemnegatív licitet tették, az eladási ár pedig mindegyikük számára a $(k + 1)$ -edik legmagasabb licit értéke lesz. Bizonyítsuk be, hogy ez az aukció veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos.
2. Bizonyítsuk be, hogy a harmadik áras árverés (melynek során egyetlen tárgyat árverezünk el $n \in \mathbb{N}_+$ játékos mellett, ahol $n \geq 3$) nem taktikázásbiztos.
3. Egy taktikázásbiztos árverési mechanizmust irigységmentesnek nevezünk, ha abban az esetben, amikor minden játékos igazat mond (azaz a saját értékelését licitálja be), akkor a saját tárgyával a mechanizmus által meghatározott áron legalább akkora lesz a nyeresége, mint a többiekével lenne a számukra meghatározott áron.

Bizonyítsuk be, hogy a Clarke-szabállyal definiált Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmus irigységmentes.

4. A fordított árverés feladatban egy szolgáltatást szeretne megvásárolni valaki: $n \in \mathbb{N}_+$ szolgáltató tesz neki árajánlatot és ezek közül választ egyet. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az i -edik szolgáltatónak a munka elvégzésének költsége $w_i \in \mathbb{R}_0^+$, és ha $t \in \mathbb{R}_0^+$ áron bízzák meg a szolgáltatás elvégzésével, akkor a nyeresége $t - w_i$, ha pedig nem őt bízzák meg, akkor 0. Javasoljuk erre a feladatra egy taktikázásbiztos mechanizmust.
5. Jegyeket árulunk egy eseményre. Az esemény költsége $T \in \mathbb{R}_0^+$. Tudjuk, hogy $n_0 \in \mathbb{N}_+$ játékos érdeklődik az esemény iránt. Tekintsük azt a mechanizmust, ami a játékosok licitjeinek beérkezése után a következőt teszi. Ha valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $n_i = 0$, akkor az árverés véget ér és nem történik eladás. Ha $n_i \neq 0$, akkor legyen n_{i+1} azon játékosok száma, akiknek a licitje legalább T/n_i . Ha $n_{i+1} = n_i$, akkor az említett n_i játékos mindegyike kap egy-egy jegyet T/n_i egységen. Ha $n_{i+1} < n_i$, akkor folytassuk az eljárást.

(Azaz ha mind az n_0 játékos licitje legalább T/n_0 , akkor mind az n_0 játékos kap egy-egy jegyet ezen a T/n_0 áron. Ha viszont $n_1 < n_0$ játékos licitjére igaz, hogy legalább T/n_0 és $n_1 \neq 0$, akkor ha mind ezen n_1 játékos mindegyikének a licitje legalább T/n_1 , akkor ez az n_1 játékos kap egy-egy jegyet T/n_1 áron – de ha $n_1 = 0$, akkor az aukció eladás nélkül ér véget –, stb.)

Bizonyítsuk be, hogy ez a mechanizmus veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos.

6. A második áras árverés félretételi árral, avagy félretételi áras Vickrey-árverés, a következőképpen működik. Rögzítünk előre egy $r \in \mathbb{R}_0^+$ félretételi árat. Ha a legnagyobb licit kisebb mint r , akkor senkinek sem adjuk el a tárgyat. Ha a legnagyobb licit legalább r , akkor az egyik legnagyobb ajánlatot tevőnek adjuk el a tárgyat a második legnagyobb ajánlat és r maximumáért.

Bizonyítsuk be, hogy a félretételi áras Vickrey-árverés veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos.

7. Két játékos licitál egy tárgyra r -félretételi áras Vickrey-árverésben. Tegyük fel, hogy a játékosok licitjei egymástól függetlenek és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlást követnek. Határozzuk meg a várható eladási árat. Mely $r \in [0, 1]$ érték esetén lesz a várható eladási ár maximális?

8. Tekintsünk egy 2-szeresen élösszefüggő gráfot, amelynek minden éle egy-egy különböző játékos tulajdonában áll. A gráf két adott s és t csúcsa között akarunk használni egy tetszőleges utat, és ehhez a választott út minden élére használati jogot kell vásárolnunk az él tulajdonosától. Tekintsük azt a mechanizmust, ami a játékosok licitjeinek beérkezése után a következőt teszi. A beérkezett licitekre, mint élköltségekre nézve válasszunk egy legrövidebb st -utat a gráfban. Ezen st -út éleire vásároljunk használati jogot, méghozzá azért a legmagasabb összegért, ami mellett ez az élt még mindig tartalmazza egy legrövidebb st -út.

Bizonyítsuk be, hogy ez a mechanizmus taktikázásbiztos.

9. Általánosítsuk a Clarke-szabállyal definiált Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmust arra az esetre, aminek során a játékosok több tárgyat is megkaphatnak (de nem kell minden tárgyat megkapnia valakinek). Ebben a felállásban minden játékosnak a tárgyak összes lehetséges részhalmazára van egy értékelése, ami azt fejezi ki, hogy mennyit ér neki az, ha pontosan ezt a részhalmazt kapja meg, és a játékosok a tárgyak összes lehetséges részhalmazára licitálnak.
10. Bizonyítsuk be, hogy a 9 feladatban egy maximális összértékű alternatíva megtalálása még abban az esetben is NP-nehéz, ha minden játékos pontosan egy (de nem feltétlenül ugyanazt) részhalmazt értékel 1 értékűnek, az összes többit viszont 0-ra értékeli.
11. Határozzunk meg a felső körcsere algoritmus segítségével a h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 lakások egy-egy újraosztását, ha jelenleg tetszőleges $i \in \{1, \dots, 5\}$ esetén az i -edik játékos lakása h_i és a játékosok preferenciasorrendje a következő.

- (a) 1: (h_3, h_2, h_4, h_1)
2: (h_4, h_1, h_2, h_3)
3: (h_1, h_4, h_3, h_2)
4: (h_3, h_2, h_1, h_4)
- (b) 1: $(h_5, h_2, h_1, h_3, h_4)$
2: $(h_5, h_4, h_3, h_1, h_2)$
3: $(h_4, h_2, h_3, h_5, h_1)$
4: $(h_2, h_1, h_5, h_3, h_4)$
5: $(h_2, h_4, h_1, h_5, h_3)$
- (c) 1: $(h_2, h_5, h_3, h_1, h_4)$
2: $(h_3, h_1, h_5, h_4, h_2)$
3: $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$
4: $(h_1, h_3, h_5, h_4, h_2)$
5: $(h_4, h_1, h_3, h_2, h_5)$