Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

8. gyakorlat 2023. május 4.

Tudnivalók

Tétel: Ha G 2-élösszefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy csúcsból fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja lehet azonos.

Tétel: Ha G 2-összefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy körből fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja nem lehet azonos.

Robbins tétele: A G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő. (A D irányított gráf akkor erősen összefüggő, ha bármely u, v csúcsa esetén létezik D-ben irányított uv-út.)

Gyakorlatok

1. Igazoljuk, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.

2. Tegyük fel, hogy a G gráf 2-élöf és nincs 2-fokú csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy van G-nek olyan e éle, amire a $G - e$ gráf is 2-élöf. Igaz-e hasonló állítás a 2-élöf helyett 2-öf tulajdonsággal?

3. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben egy fül páros sok, az összes többi pedig páratlan sok élt tartalmaz. Igazoljuk, hogy G-nek van teljes párosítása.

4. Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M-beli él.

5. Tegyük fel, hogy egy G gráfban $\nu(G) < \frac{|V(G)|-1}{2}$ teljesül a maximális párosítás $\nu(G)$ méretére. Bizonyítsuk be, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely fülfelbontásában a páros sok élt tartalmazó fülek száma legalább $|V(G)| - 2 \cdot \nu(G) + 1$.

6. Igazoljuk, hogy minden erősen összefüggő G gráf előállítható egy irányított körből kiindulva irányított fülek egymás utáni hozzávételével.

7. Tegyük fel, hogy a G gráf erősen összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy ha G nem egy kör, akkor elhagyható G egy éle úgy, hogy a kapott gráf erősen összefüggő maradjon vagy található G-ben olyan irányított út, aminek a csúcsait G-ből elhagyva erősen összefüggő gráfot kapunk.

8. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben az első fül egy C_3, minden további fül pedig 2 élt tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros, vagy zöld színekkel úgy, hogy egyetlen él kapja meg mindkét színt, továbbá a piros és a zöld élek is G egy-egy feszítőfáját alkossák.