Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

7. gyakorlat 2023. április 27.

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G - e)$-nek ($(G - v)$-nek) több komponense van, mint G-nek. A G gráf 2-*élösszefüggő*, ha G összefüggő és G-nek nincs elvágó éle. A G gráf 2-*összefüggő*, ha G összefüggő, legalább 3 csúcsa van és G-nek nincs elvágó pontja. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja. A G *maxblokkja* a G maximális blokk részgráfja, a G 2-*komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés: Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén
(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.
(2) A 2-komponensek faszerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G-ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)
(3) A G maximális blokkjai faszerűen csatlakoznak egymáshoz. (Azaz a $T_2(G)$ gráf erdő, ahol $T_2(G)$ csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig az illeszkedő blokk-elvágó pont párok.)

Def: A G gráf K 2-komponense *levél*, ha K a G-nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komponens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, azaz ha K a G egy olyan kompnense, ami 2-élösszefüggő.

Def: A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G-nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy kompnense.

Tétel: A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\cdot\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel: A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+2\cdot m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G-ből egy csúcs elhagyásával keletkező komponensek maximális száma.

Def: Legyen $G = (V, E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u, v)$ jelöli az u-ból v-be vezető pként éldiszjunkt utak max számát. A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$ megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Def: A G *vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek $E(X)$ halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés: Adott u, v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u, v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. (Sőt: $n - 1$ is elég, hiszen u rögzíthető.)

Tétel: Tfh a $G = (V, E)$ n csúcsú gráf élein adott a $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény, és az $X \subsetneq V$ csúcshalmaz a G egy $E(X)$ minimális vágását határozza meg. Ha c-vel arányos eloszlással választjuk G egy véletlen élét, akkor $P(e \text{ kilép } X\text{-ből}) \leq \frac{2}{n}$.

Köv.: (1) Az előző Tételben az X minimális vágás legalább $\frac{n-2}{n}$ valószínűséggel túléli az e él összehúzását.
(2) Ha a Tételben leírt módon random élek összehúzásával G-ből egy 2-pontú gráfot kapunk, akkor ez a gráf legalább $\frac{2}{n(n-1)}$ valószínűséggel az X által meghatározott vágásnak felel meg.
(3) A (2)-ben leírt lépéseket a G gráfon $k \cdot n^2$-szer végrehajtva legfeljebb e^{-2k} valószínűséggel nem találjuk meg az X által indukált minimális vágást.

Def: A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén $d(V_i, v_{i+1}) \geq d(V_i, v_j)$ teljesül, ahol $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, azaz a soron következő v_i csúcs mindig a korábbi csúcsokhoz legjobban (legtöbb éllel) kapcsolódó csúcsok egyike.

Lemma: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a $\{v_n\}$ minimális élszámú olyan vágást határoz meg, ami v_n-et és v_{n-1}-et szeparálja

Megfigyelés: Tfh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje. Ha G-nek van v_n és v_{n-1}-et szeparáljó minimális vágása, akkor $X = \{v_n\}$ a G egy minimális vágása. Ha pedig nincs, akkor G minimális vágásai megegyeznek a v_n és v_{n-1} csúcsok összeragasztásával képzett G' gráf minimális vágásaival.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus

Input: $G = (V, E)$ multigráf, Output: G egy X minimális vágása.

I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.

II. Rekurzív hívással meghatározzuk a v_{n-1} és v_n csúcsok összeragasztásával kapott G' gráf egy minimális Y' vágását, ami G-ben Y-nak felel meg.

III. Ha $d(Y) \le d(v_n)$, akkor az output $X = Y$, ha pedig $d(X) > d(v_n)$, akkor $X = \{v_n\}$ az output.

Megjegyzés: A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus nem rekurzív felfogásban úgy néz ki, hogy a maxvissza sorrend utolsó két csúcsát összeolvasztjuk, és ezt az eljárást ismételjük addig, míg végül 2-csúcsú gráfot kapunk. A kapott maxvissza sorrendek utolsó csúcsai határozzák meg a minimális vágásjelölteket, és a legkevesebb élt tartalmazó jelölt az algoritmus outputja.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak egyetlenegy elvágó pontja van. Tegyük fel továbbá, hogy a G komplementerének minden e élhez ismert az e kiépítésének költsége. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális költségű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-összefüggővé válik, azaz nem lesz elvágó pontja.
2. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Hogyan függ a G 2-komponenseinek számától azon élek minimális száma, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik?
3. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik. (A G gráf maxblokkjai a G olyan összefüggő maximális részgráfjai, amelyek nem tartalmaznak elvágó pontot.)
4. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban nem található három egymástól pontdiszjunkt részgráf, melyek mindegyike pontosan egy éllel kapcsolódik a maradék gráfhoz. Mutassuk meg, hogy G legfeljebb egy további él hozzávételével 2-élösszefüggővé tehető.
5. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.
6. Adjunk meg olyan eljárást, ami tetszőleges irányítatlan G input gráf esetén meghatározza a legkisebb olyan k pozitív egész számot, amire hozzáadható G-hez k él úgy, hogy a kapott gráf 2-szeresen élösszefüggő legyen, és a hozzáadott élek utat alkossanak.
7. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy legalább 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.
8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban találhatók olyan (u_1, w_1) és (u_2, w_2) pontpárok, amikre $w_1 \ne w_2$, valamint $\lambda(u_1, w_1) = d(w_1)$ és $\lambda(u_2, w_2) = d(w_2)$ teljesül.
9. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G (nem feltétlenül egyszerű) gráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 4, 6, 7, 7, 6, 8, 6, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Állapítsuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráf 6-szorosan élösszefüggő legyen.
10. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?