Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

5. gyakorlat 2023. március 30.

Tudnivalók

A Farkas-lemma néhány alakja: (1) $\exists x: \ Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0$
(2) $\exists x: \ Ax \geq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb > 0$ (3) $\exists x \geq 0: \ Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0$
(4) $\exists x \geq 0: \ Ax = b \iff \nexists y : yA \geq 0, yb < 0$

Def: *Lineáris program* alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett. Az LP feladat *sztenderd alakú*, ha minimalizálás esetén minden egyenlőtlenség $\geq$, maximalizáláskor pedig $\leq$ alakú. Példák:
(1) $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$, (2) $\max\{cx : \ x \geq 0 \ Ax \leq b\}$ (3) $\max\{cx : \ x \geq 0, \ Ax = b\}$
(4) $\min\{cx : \ Ax \geq b\}$ (5) $\min\{yb : \ yA \geq c\}$ (6) $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$

Def: Az LP-vel jelölt $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$ lineáris programozási feladat.

Dualitástétel Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.
(1) Sem az LP, sem a DLP nem megoldható.
(2) Az LP nem megoldható, a DLP megoldásain pedig az yb célfüggvényérték alulról nem korlátos.
(3) A DLP nem megoldható az LP megoldásain pedig a cx célfüggvényérték felülről nem korlátos.
(4) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

Köv.: (1) Ha x és y a fenti LP ill DLP megoldásai, akkor $cx \leq yb$.
(2) (Optimalitási kritérium) Ha a fenti LP ill. DLP feladatok x ill. y megoldásaira $cx = yb$ teljesül, akkor x a primál LP, y pedig a duál DLP optimális megoldásai.

Megjegyzés: Tetsz LP/DLP feladat duálisa az alábbi ökölszabályok segítségével képezhető.
(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni. (1) A feladatokat sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duál változókhoz primál feltételek, duál feltételekhez primál változók tartoznak, és viszont.
(4) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik.
(5) A primál célfv együtthatói a duál konstansok, a duál célfv együtthatói pedig a primál konstansok.
(6) Az ezen szabályokkal képzett primál/duál feladat is sztenderd alakú.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az x és y változókkal megadott kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásai az xy-síkon egy P konvex sokszöget alkotnak. Határozuk meg, hogy melyek azok a megoldások, amelyek alkalmasan választott c_1, c_2 értékekkel maximalizálják a $c_1x + c_2y$ célfüggvényértéket. Ha ismerjük a P sokszög csúcsainak koordinátáit, akkor adott a c_1 és c_2, akkor hogyan lehet gyorsan megtalálni egy optimális megoldást?

2. Adjunk példát a dualitástételben szereplő négy eset mindegyikére, azaz írjunk fel olyan x_1 és x_2 változókkal megadott primál feladatokat, amire a duális változók y_1 és y_2 és az LP ill. DLP megoldhatóságának minden lehetséges kombinációja előfordul. Mutassuk meg, hogy miért nem korlátos az célfüggvényérték, ha csak az egyik feladat oldható meg, és adjuk meg az optimális megoldásokat, ha mindkét feladatnak van megoldása.

3. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

4. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
   (a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális- illetve maximális ára, amely mellett az 3. feladatnál kapott értékek mellett maximális bevételt kapunk?
   (b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
   (c) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
   (d) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 130 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
   (e) Lehetséges-e úgy megváltoztatni mindkét típusú nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?

5. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\\ &x_1 + x_3 + 5x_4 = 1\\ &x_2 \leq 0\end{aligned}$$

6. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?
   (b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$$\begin{aligned}&\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5\\ &x_2 + 2x_4 \leq 6\\ &x_1 + x_3 + x_4 \leq 7\\ &2x_2 + 3x_4 \leq 8\end{aligned}$$

7. (a) Mi a duálisa az alábbi LP feladatnak?
   (b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$$\begin{aligned}&\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1\\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3\\ &3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8\\ &2x_1 + 5x_2 \leq 2\end{aligned}$$

8. (a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)
   (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$$\begin{aligned}&\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 \leq 1\\ &x_1 + x_2 \leq 2\\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\\ &\vdots\\ &x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n\\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0\end{aligned}$$