Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

4. gyakorlat 2023. március 23.

Tudnivalók

Megfigyelés: Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer $Ax \le b$ kanonikus alakba írható: a változókat az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal$, a jobboldalon álló konstansokat a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^\intercal$ vektorok írják le, A pedig az együtthatómátrix. (Az egyenlőségeket két egyenlőtlenségként írjuk fel, a fordított ($\ge$) egyenlőtlenségek helyett pedig a (-1)-szeresük szerepel $\le$ relációval.)

Fourier-Motzkin-elimináció A Gauss-eliminációhoz hasonló elemi sorekvivalens átalakításokat végzünk (sorcsere, sor λ-val végigszorzása, egy sornak a másikhoz hozzáadása), de itt csak $\lambda > 0$ lehet, ezért egy-egy változó elminációja bonyolultabb, mint a Gauss-elimináció esetén. Itt is egymás után elmináljuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat, azaz olyan egyenlőtlenségrendszerre térünk át, amelyikben az éppen eliminált változó már nem szerepel. Az x_i eliminációját az alábbiak szerint végezzük.

Az kibővített együtthatómátrix sorait alkalmas pozitív konstansokkal szorozva elérjük, hogy az x_i oszlopában minden elem ± 1 vagy 0 legyen. Sorcserékkel a mátrixot $A = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & b_+ \\ A_- & b_- \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ alakba írjuk ahol az x_i oszlopában A_+, A_- ill. A_0 tartalmazza rendre az 1, -1, ill. 0 elemeket. Az elimináció után az $A' = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ mátrixot kapjuk, ahol A^*-ba gyűjtjük az összes lehetséges A_+ ill. A_--beli sorpár összegét. b^* pedig a b_+ és b_- megfelelő koordinátáinak összege. Az elimináció utáni mátrixban tehát x_i oszopában csak 0 együtthatók állnak.

I. eset Az összes változó eliminálása során tilos sor keletkezik, azaz olyan csupa 0 sora A-nak, amelyhez a b konstans negatív. Ekkor nincs megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

II. eset Nem keletkezik tilos sor. Ekkor $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ sorrendben értéket adunk az egyes változóknak. Az x_i-nek történő értékadáskor csak az x_i eliminációjakor elhagyott soroknak megfelelő egyenlőtlenségekre kell figyelni: ezek adnak az x_i-re egymásnak nem ellentmondó alsó és felső korlátokat. Ilyenkor tehát van megoldás, és konstráltunk is egyet.

Megfigyelés: A Fourier-Motzkin-elimináció során kapott minden egyes egyenlőtlenség az eredeti $Ax \le b$ rendszer egyenlőtlenségeinek alkalmas nemnegatív többszöröseinek összege.

Köv.: Farkas-lemma Az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerre az alábbiak közül pontosan egy teljesül (1) $\exists x : Ax \le b$ ill. (2) $\exists y \ge 0 : yA = 0,\ yb < 0$.

Gyakorlatok

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos. ($u < v$ jelentése: $u \le v$ és $u \ne v$.)
   (a) Ha $u \le v$ és $u \ne v$ akkor $u < v$.
   (b) Ha $u \le v$ és $u \ge v$ akkor $u = v$.
   (c) Ha $u \ge 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \ge 0$.
   (d) Ha $u \le v$ és $a \ge 0$ akkor $a \cdot u \le a \cdot v$.

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer.

$$\begin{array}{rrrr}
2x+y+z \le 5 & 2x+y+z \le 5 & 2x+y+z \le 5 & 2x_1+x_2+x_3+x_4 \le 10 \\
x+2y-z \le 4 & x+2y-z \le 4 & x+2y-z \le 4 & x_1+3x_2+x_3+x_4 \le 12 \\
z \le 1 & z \le 1 & z \le 1 & x_1+x_2+4x_3+x_4 \le 14 \\
x-2y-2z \ge -5 & x-2y-2z \ge -5 & x-2y-2z \ge -5 & x_1+x_2+x_3+5x_4 \le 16 \\
x+y+z \ge 3 & x+y+z \ge 4 & x+y+z \ge 5 & x_1+x_2+x_3+x_4 \ge p
\end{array}$$

3. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \le b$ alakban, majd döntsük el a Farkas-lemma segítségével, hogy megoldhatóak-e. (Azaz, ha nem megoldható, akkor adjunk meg egy y vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az

$Ax \leq b$ rendszer megoldhatatlanságát.)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\geq -2 \\ x_1 + 2x_3 - 8x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

4. Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszernek hogyan lehet a Fourier-Motzkin-eliminációval meghatározni egy olyan megoldását, amelyikben az x_1 változó értéke a lehető legkisebb?

5. Adjunk meg olyan módszert, ami tetszőleges $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez az $x_1, \ldots$ változóknak olyan értékadását találja meg, amire a legjobban sérülő egyenlőtlenség a lehető legkevésbé sérül. Más szóval talájuk meg az egyenlőtlenségrendszernek egy megoldását, ha van, ha pedig nincs, akkor úgy válasszunk értéket a változóknak, hogy az $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots a_{i,n}x_n - b_i$ mennyiségek közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

6. Adjunk olyan módszert, aminek a segítségével tetszőleges $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez található olyan megoldás, amire $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ minimális.