Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

3. gyakorlat 2023. március 16.

Tudnivalók

Konvenció: Tetsz. $f : H \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A) = \sum\{f(a) : a \in A\}$.

Def: Adott $G = (A \cup B, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén az M párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül a G tetszőleges M' párosítására.

Megfigyelés: (1) A maximális súlyú párosítás $w \equiv 1$ esetén maximális méretű párosítást jelent. (2) A maximális súlyú párosítás keresésének feladata visszavezethető maximális súlyú **teljes** párosítás keresésére: elhagyjuk a negatív súlyú éleket, a kisebbik színosztályt kiegészítjük hogy a két színosztály mérete egyforma legyen, és a páros gráfból „hiányzó” éleket 0 súllyal vesszük be.
(3) Maximális súlyú teljes párosítás keresésekor feltehető, hogy minden élsúly nemnegatív, mert ugyanannyival növelve minen él súlyát ugyanazok a párosítások maradnak maximális súlyúak.

A továbbiakban maximális súlyú teljes párosítást keresünk nemnegatív súlyfüggvény mellett.

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c : V \to \mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e = uv \in E$ élre $w(e) \leq c(u) + c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.

Megfigyelés: Ha c súlyozott lefogás a w súlyfüggvényhez, akkor tetszőleges M teljes párosításra $\tilde{w}(M) = \sum\{w(uv) : uv \in M\} \leq \sum\{c(u) + c(v) : uv \in M\} = \tilde{c}(V)$ teljesül.

Köv.: (1) Ha $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$ teljesül valamely M teljes párosításra és c súlyozott lefogásra, akkor M maximális súlyú teljes párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.
(2) Ha az M teljes párosítás pontos élekből áll, akkor $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.

Egerváry-algoritmus (magyar módszer) páros gráfban max súlyú teljes párosítás keresésére. Input: $n \times n$ táblázat (sorok ill. oszlopok a színosztályok, a mezőkbe írt számok az élsúlyok). Output: súlyozott lefogás és teljes párosítás pontos élekből.

A sorokhoz 0 súlyt rendelünk, az oszlopokhoz pedig az adott oszlopban álló maximumot. A pontos éleken keresünk maximális méretű párosítást a tanult módon. Ha ez teljes párosítás, kész vagyunk. ha nem, akkor megkeressük a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető sorokat és oszlopokat. Előbbieken növeljük, utóbbiakon csökkentjük a súlyozott lefogást a legnagyobb olyan ε értékkel, amivel még továbbra is súlyozott lefogást kapunk. Ezáltal a $\tilde{c}(V)$ csökken, és több oszlop lesz alternáló úton elérhető a fedetlen oszlopok halmazából. Innen iterálunk, azaz vagy nagyobb méretű párosítást találunk pontos élekből, vagy tovább csökkentjük a súlyozott lefogás összsúlyát. Előbb-utóbb meglesz a pontos élekből álló teljes párosítás.

Gyakorlatok

1. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. 0/1-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Ezek után a megadott páros gráf minden egyes e éléről döntsük el, hogy kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban. Példa jobbra ill. $V = \{a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $E = \{a1, a2, a3, a4, b4, c4, c5, d2, d3, d4, d5, d6, e4, e5, f5\}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Adott egy 0/1 mátrix és abban kijelöltünk k db bástyaelrendezésben álló 1-est. Hogyan lehet eldönteni, hogy található-e $k + 1$ db bástyaelrendezésben álló 1-es? Ha nincs, akkor hogyan lehet erre gyorsan bizonyítékot találni?
3. A G teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_i b_j$ él súlya pedig a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).
$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
4. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok ill. az oszlopok felelnek meg, az (i, j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G-ben maximális súlyú párosítást.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
5. A G teljes páros gráf színosztályai legyenek $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_i b_j$-vel él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális). (ZH '09.)

6. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

   (a) Súlyozott lefogás-e a $w(a_i) = i$, $w(b_i) = i + 1$ $(1 \leq i \leq 5)$?

   (b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?

7. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzuk meg az órán tanult módszerrel G egy maximális súlyú M párosítását, és igazoljuk egyúttal, hogy nincs G-ben M-nél nagyobb súlyú párosítás. (ZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

8. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzunk meg G éleinek egy minimális összsúlyú lefogását, és igazoljuk, hogy nincs G éleinek nincs ennél kisebb összsúlyú lefogása. (pZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	0	1	9
B	0	8	6	11
C	1	5	7	12
D	9	11	12	16

9. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek. Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (ZH'20)

(Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!)

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

10. A G páros gráf élei az $\{A, B, C, D\}$ ill. $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A, B, C ill. D. pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli? (Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.) (pZH '20)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

11. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokkal rendelkező páros gráf élsúlyait az alábbi táblázat tartalmazza. Súlyozott lefogást alkotnak-e a sorok mellett és az oszlopok alatt álló számok? Ha igen, akkor döntsük el, hogy minimális súlyú-e ez a súlyozott lefogás. Ha igen, igazoljuk ezt, ha nem, akkor adjunk egy kisebb súlyú súlyozott lefogást.

	A	**B**	**C**	**D**	
1	7	8	6	6	4
2	6	5	4	3	2
3	7	8	5	4	4
4	5	4	3	4	2
	4	4	2	2	

12. Legyen $F = (V, E)$ egy fa, és legyen $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ a fa élein egy hosszfüggvény. Az a cél, hogy F csúcsaiból minél több diszjunkt párt képezzünk úgy, hogy az egyes párokat a fában összekötő utak összhossza a lehető legnagyobb legyen. Adjunk gyors algoritmust, ami megtalál egy optimális párosítást, és írjunk le egy olyan bizonyítékot, ami minden esetben igazolja a talált párosítás optimalitását. (*)