# Kombinatorikus optimalizálás 2023. II. félév

2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

## Tudnivalók

**Def:** A *hálózat* egy $(G, s, t, c)$ négyes, ahol $G = (V, E)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ a $G$ különböző csúcsai, ún. *termináljai* ($s$ a *termelő*, $t$ a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to \mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0 \leq f(e) \leq c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E} f(uv) = \sum_{vu\in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-feltétel*). Az $f$ folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az $f$ folyam *értéke*) az $s$-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su\in E} f(su) - \sum_{us\in E} f(us)$.

**Def:** A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat $X$ által indukált *(st-)vágása* az $X$ és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a $V \setminus X$-ből $X$-be futó élek is. Az $X$ által indukált $st$-vágás kapacitása $c(X) := \sum_{u\in X, v\in V\setminus X} c(uv)$, azaz az $X$-ből $V \setminus X$-be futó élek összkapacitása .

**Lemma:** Ha $(G, s, t, c)$ egy hálózat, $f$ egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy $st$-vágást indukál, akkor $m_f = \sum_{v\in X, u\in V\setminus X} f(vu) - f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. **Köv.:** Ha $f$ megengedett folyam és $X$ $st$-vágást indukál, akkor $m_f \leq c(X)$.

**Állítás:** Ha a $(G, s, t, c)$ hálózatban egy $f$ $st$-folyam és $s \in X \not\ni t$ esetén $m_f = c(X)$ teljesül, akkor $f$ maximális nagyságú $st$-folyam és $X$ minimális kapacitású $st$-vágást indukál.

**Ford-Fulkerson tétel:** Tetszőleges hálózatban $\max m_f = \min c(X)$.

**Def:** Ha $(G, s, t, c)$ egy hálózat, $f$ pedig egy folyam, akkor a $G_f = (V(G), E_f)$ az $f$-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv \in E_f$ ha $uv \in E(G)$ és $f(uv) < c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu \in E(G)$ és $f(vu) > 0$ (*visszaél*). Az $f$ folyamhoz egy *javító út* a $G_f$ segédgráf egy $s$-ből $t$-be vezető irányított útja.

**Állítás:** Ha egy $f$ folyamhoz tartozó $G_f$ segédgráfban pontosan akkor létezik javító út, ha $f$ nem maximális nagyságú. A javító út mentén az előreéleken $\varepsilon$-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken $\varepsilon$-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága $\varepsilon$-nal növelhető.

**Javító utas algoritmus** Kiindulunk a $f \equiv 0$ folyamból, és addig növelünk az aktuális $f$-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális. A segédgráfban $s$-ből elérhető pontok $X$ halmaza ekkor minimális $st$-vágást indukál.

**Egészértékűségi (EgÉr) lemma:** Ha a $c$ kapacitásfüggvény minden élen egész értéket vesz fel, akkor a maximális nagyságú folyamok közt létezik olyan $f$ folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel (azaz ha a $c$ kapacitás egész, akkor létezik *egészfolyam* a maximális folyamok között).

**Def:** Ha $G = (V, E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$ az $X$ ponthalmaz $G$-beli szomszédsága. *Párosítás* alatt független élhalmazt értünk. $\nu(G)$ a $G$-beli független élek maximális száma, $\tau(G)$ pedig a $G$ gráf lefogó ponthalamazai közül a legkisebb mérete. A $G$ gráf egy $U$ ponthalmaz *lefogó* tulajdonságú, ha $G$ minden élét lefogja, azaz $G - U$ üresgráf.

**Hall tétele:** Tetsz. $G = (A, B; E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik $A$-t fedő párosítása, ha az bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

**Frobenius tétele:** Tetsz. $G = (A, B; E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha (1) $|A| = |B|$ és (2) $|X| \leq |N(X)|$ teljesül tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmazra.

**Kőnig tétel**: Ha $G$ véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

**Megfigyelés:** Tetsz. $A$ és $B$ színosztályokkal rendelkező páros gráf maximális méretű párosítását megkaphatujuk a javító utas algoritmus segítségével. Ehhez $G$ minden élét $A$-ból $B$-be irányítjuk, felveszünk egy $s$ termelőt és $t$ fogyasztót, és az $sa, bs$ éleket minden $a \in A$ ill. $b \in B$ csúcshoz. Minden élnek egységnyi kapacitást adva a kapott hálózat egészfolyamai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek $G$ párosításainak. Ezért a hálózaton a javító utas algoritmussal maximális nagyságú folyamot keresve egészfolyamot kapunk, ami $G$ maximális nagyságú párosításának felel meg.

**Alternáló utas algoritmus**:

<u>Input</u>: $G = (A, B; E)$ ps gráf. <u>Output</u>: $M$ maximális párosítás.

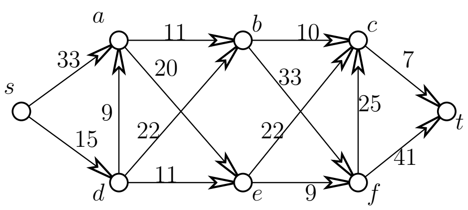
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ú.n. alternáló út, aminek felváltva $M$-beliek és $M$-en kívüliek az élei és $A$ egy fedetlen pontjából $B$ fedetlen pontjába. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy $M$ éleit $B$-ből $A$-ba, $G$ többi élét pedig $A$-ból $B$-be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út $M$-beli éleit kidobjuk $M$-ből, az $M$-en kívülieket pedig bevesszük $M$-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális $M$ párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Az $A$-beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető $B$-beli csúcsokkal és az $M$ által fedett, $A$-beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető $A$-beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

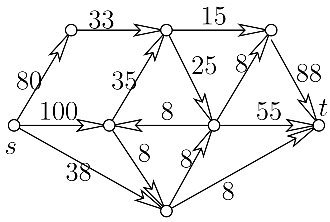
**Megjegyzés:** (1) Páros gráf reprezentálható nemnegatív egészekből álló mátrixszal, ahol a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztálynak felelnek meg, és a mátrix elemei az adott sornak ill. oszlopnak megfelelő csúcsok között futó élek száma. A gráf párosítása olyan pozitív értékekekt tartalmazó mezők kiválasztásának felel meg, amelyek bástyaelhelyezést alkotnak, azaz minden sorban és minden oszlopban legfelejbb egy kiválasztott mező van.

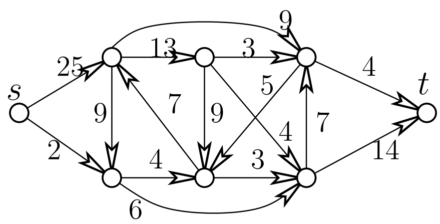
(2) Az alternáló utas algoritmussal tetszőleges 0/1 mátrixban tudunk maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-est találni. Minden lépésben vagy eggyel több egyest találunk, vagy megállapítjuk, hogy elértük a maximumot. Ehhez fedetlen (azaz 1-est nem tartalmazó) oszlopból fedetlen sorba kell eljutni felváltva vízszintesen és függőlegesen 1-esről 1-esre lépve úgy, hogy a kiválasztott és ki nem választott 1-esek felváltva következnek. Ha ez sikerül, akkor a lépcsőzetes út mentén cserékünk, és több bástyaelhelyezésben álló 1-est kapunk. Ha nem sikerül, akkor megkapjuk az oszlopok egy $X$ halmazát, amire az $X$-beli 1-esek $|X| - k$ sort töltenek ki, ahol $k$ a fedetlen oszlopok száma. Ezért tetsz. bástyaelhelyezés esetén legalább $k$ oszlopban nem áll 1-es. Mi épp ilyet találtunk, vagyis megvan a maximum.

## Gyakorlatok

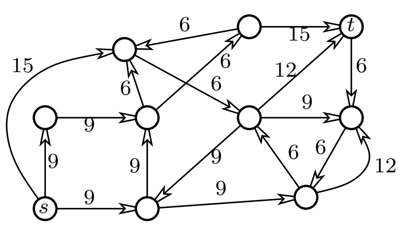
1. Mutassunk a bal oldali ábrán látható $(G, s, t, c)$ hálózatban egy minimális kapacitású $st$-vágást. Találjunk a középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású $st$-vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású $st$-vágás. (✓)
2. A sithek Sötét Testvérisége a jobb oldalon látható gráf $s$ csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács $t$ támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének $t$-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon $s$-ből $t$-be jutni. (!)

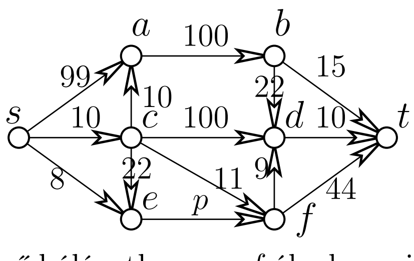


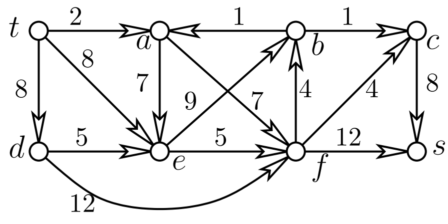





3. Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó $(G, s, t, c)$ hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.) (✓)








4. Határozzuk meg a fenti középső hálózatban az $ef$ él $p$ kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális $st$-folyamnagyság pontosan 42.Határozzuk meg a maximális folyamnagyságot a $p$ parméter függvényében.
5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. A fenti jobb oldali ábrán $t$ jelzi a tározót, $s$ pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges $s$-be vezető utat az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy

munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre. (!)

6. Adott a $D$ irányított gráf valamint élein egy $c$ kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $s, t$ és $w$ a $D$ olyan csúcsai, hogy létezik $D$-ben $m$ nagyságú $st$-folyam és $m$ nagyságú $tw$-folyam is, akkor $D$-ben létezik $m$ nagyságú $sw$-folyam. (!)
7. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív $\varepsilon$-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan $\varepsilon$-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas $\varepsilon$-nal növelve, a maximális folyamnagyság is $\varepsilon$-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él? (✓)
8. Legyen $s$ és $t$ egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit $s$-től $t$ felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális $st$-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen? (*)
9. Igazoljuk, hogy ha a $(G, s, t, c)$ hálózatban a $c$ kapacitások egészek és $f$ egy megengedett folyam, akkor van olyan $f'$ egészfolyam is, amire $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden $e$ élre. (*)
10. Egy $(G, s, t, c)$ hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú $st$-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú $st$-folyam nagysága legalább 15.
11. Mutassuk meg a Ford-Fulkerson-tétel segítségével, hogy tetszőleges $G$ páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$ teljesül a független élek maximális és a lefogó pontok minimális számára.
12. A 9. feladat segítségével mutassuk meg, hogy ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
13. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin úgy helyeztünk el kavicsokat, hogy egyetlen sorban és egyetlen oszlopban sincs 42-nél több kavics. Bizonyítsuk be, hogy a mezőkön elhelyezett kavicsok legfeljebb 42 csoportba oszthatók úgy, hogy a kavicsok minden csoportban bástyaelhelyezést alkossanak.
14. Az alábbi táblázatban álló X-ek közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott X-ek bástyaelhelyezést alkossanak?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X$ | | $X$ | | |
| | $X$ | | | $X$ | |
| | | | $X$ | $X$ | |
| $X$ | | $X$ | | | $X$ |
| | $X$ | | | $X$ | |
| | | | $X$ | | |

15. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is szedünk szét egy 54-lapos francia kártya csomagot 13 db 4 lapos csomagra, ki lehet választani mind a 13 csomagból egy-egy kártyát úgy, hogy csupa különböző értékű lapot válasszunk. (Egy lap értéke 13-féle lehet, mégpedig 2-től ászig.)