Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

9. gyakorlat 2023. május 11.

Tudnivalók

Közelítő algoritmusok

Def: Tfh egy problémának minden I inputjához tartozik egy X_I megoldáshalmaz, a cél pedig olyan $x \in X_I$ megoldás keresése, amelyik az $f_I(x_I)$ célfüggvényt minimalizálja. Az A algoritmus *additív (abszolút) hibája* legfeljebb C, ha tetszőleges I inputhoz olyan y_I megoldást ad, amire $f_I(y_I) \leq \min\{f_I(x_I) + C : x_I \text{ az } I \text{ megoldása}\}$.

Példa: (1) $\chi'(G)$ meghatározása. Tetszőleges egyszerű gráf éleinek $\Delta(G)+1$ színnel történő színezésére van gyors eljárás, így a $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ miatt ennek az additív hibája legfeljebb 1.

(2) A gráf leghosszabb körének meghatározása tartalmazza a Hamilton-kör létezésének eldöntési problémáját, így NP-teljes (reménytelen rá polinomidejű algoritmust találni). Azonban konstans additív hibával sem lehet hatékonyan megoldani a feladatot, és ez abból látszik, ha az inputgráf minden élét egy C hosszúságú úttal helyettesítjük.

Def: Az A algoritmus *multiplikatív (relatív) hibája* legfeljebb α, más szóval A egy *α-közelítő (avagy α-approximációs) algoritmus*, ha minden I inputra $f_I(y_I) \leq k \cdot \min\{f_I(x_I)+C : x_I \text{ az } I \text{ megoldása}\}$.

Példa: A minimális lefogó ponthalmaz $\tau(G)$ méretének meghatározása általában NP-teljes feladat, ám 2-közelítést kapunk, ha kiválasztunk egy nem bővíthető M párosítást G-ben, és a $V(M)$ lefogó ponthalmaz méretét adjuk válaszként.

Halmazfedési probléma Adott az U n-elemű alaphalmaz, az $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazok, és ezek $c(S_i)$ nemnegatív költsége. Cél az S_i-k egy minimális összköltségű részrendszere, ami a teljes U alaphalmazt lefedi.

Mohó algoritmus a halmazfedési feladatra Egymás után választjuk az fedésbe bekerülő részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S_i-t, amire $c(S_i)/m$ minimális, ahol m az S_i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma.

Tétel: (1) A fenti mohó algoritmust n elemű alaphalmazon futtatva a halmazfedési feladat egy $(1+\ln n)$-közelítését kapjuk.
(2) A halmazfedési feladatra nem létezik $konst \cdot \ln n$-nél lényegesen jobb approximáció.

Ütemezési problémák **Input:** $J_1, J_2, \ldots$ munkák p_i megmunkálási idők, gépek m száma.

Feladat: A munkák gépekre ütemezése. Egy S ütemezésre $S_t(i)$ és $S_m(i)$ adja meg, hogy J_i-t mikor és melyik gépen kell elkezdeni. $C_i^S = S_t(i) + p(i)$ a J_i befejezési időpontja, $C_{max}^S = \max_i C_i^S$ pedig az S ütemezés átfutási ideje.

Megkötések: (1) (Itt) a gépek egyformák. (2) Egy gépen egyszerre egy munka végezhető. (3) Minden munkát megszakítás nélkül kell elvégezni.

Lehetséges feltételek J_i-kre: r_i (rendelkezésre állási idő), w_i (súly), d_i (határidő), $\prec$ (precedencia)

Optimalizálandó mennyiségek: C_{max}^S, $(\sum_i C_i^S)/n$, $(\sum_i w_i C_i^S)/n$

Tömör jelölés: $\alpha|\beta|\gamma$, ahol $\alpha \in \{1, Pm, P\}$ (1 gép, m gép, sok párhuzamos gép)
$\beta \in \{p=1, r_i, d_i, \prec\}$ (feltételek megadása) $\gamma \in \{C_{max}, \sum_i C_i, \sum_i w_i C_i\}$ (célfv megadása)

Példa: : (1) $1||C_{max}$: 1 gépen kell mihamarabb végezni. $OPT = \sum_i p_i$.
(2) $1|\prec|C_{max}$. Nem mindegy a sorrend, de itt is $OPT = \sum_i p_i$.

Tétel: Az $1||\sum_i C_i$ feladatra optimális ütemezés a munkák p_i szerint növekvő (SPT) sorrendben történő elvégzése. Az $1||\sum_i w_i C_i$ feladatra optimális ütemezést ad p_i/w_i szerinti növekvő sorrend.

Tétel: (1) A $P2||C_{\max}$ probléma optimális megoldása reménytelen. (2) a $Pm||C_{\max}$ feladatra a listás ütemezést használó LS algoritmus $(2-\frac{1}{m})$-approximációt ad. (Itt a soron következő munkát mindig az elsőnek felszabaduló gépen végezzük.) (3) Ha az LS algoritmust p_i szerint csökkenő (LPT) sorrendben végezzük, akkor $\frac{4}{3}$-közelítést kapunk.

Ládapakolási (bin packing) feladat
Minél kevesebb egységnyi térfogatú ládába kell bepakolni az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat.

FF (first fit) algoritmus minden tárgyat az első olyan ládába teszünk, amibe elfér.

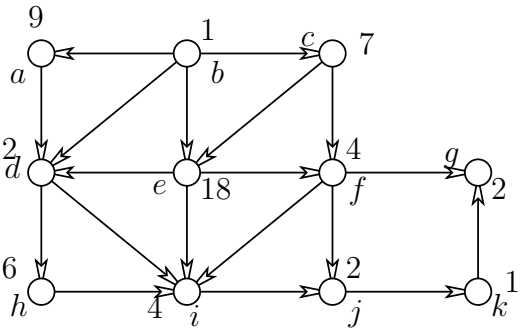
FFD (first fit decreasing) algoritmus Az FF algoritmust a méretek csökkenő sorrendjében futtatjuk.

Tétel: Az FF algoritmus legfeljebb $\frac{17}{10}OPT + 2$, az FFD legfeljebb $\frac{11}{9}OPT + 7$ ládát használ.

Gyakorlatok

1. Igazoljuk, hogy a maximális párosítás $\nu(G)$ méretének meghatározására $\frac{1}{2}$-közelítést kapunk, ha a G gráfban mohó módon választunk diszjunkt éleket egészen addig, amíg már nem lehet a korábban választottaktól diszjunkt, újabb élt találni.

   Mutassuk meg azt is, hogy ha ezt az algoritmust úgy fejlesztjük tovább, hogy megpróbálunk minden mohón talált uv élt helyettesíteni egy xu és egy yv éllel a párosítás által fedetlen, alkalmas x és y csúcsokra, akkor amennyiben már egyik megadott módon sem növelhető a párosítás, akkor az algoritmus egy $\frac{2}{3}$ közelítést ad.
2. Futtassuk le a halmazfedési problémára tanult mohó algoritmust konkrét példán.
3. Keressünk hatékony közelítő algoritmust a halmazfedési probléma alábbi általánosítására. Adott egy n elemű U alaphalmazon az $S_1, S_2, \ldots, S_k$ részhalmazok rendszere és adottak a $c(S_i) \geq 0$ költségek. A cél, hogy úgy válasszunk ki néhány részhalmazt a fentiek közül, hogy U minden elemét legalább két kiválasztott részhalmaz tartalmazza és a kiválasztott részhalmazok összköltsége a lehető legkevesebb legyen. Milyen multiplikatív hibával tudjuk közelíteni az optimális megoldást?
4. Keressünk hatékony közelítő algoritmust a halmazfedési probléma alábbi általánosítására. Adott egy n elemű U alaphalmazon az $S_1, S_2, \ldots, S_m$ részhalmazok rendszere és adottak a $c(S_i) \geq 0$ költségek. A cél, hogy úgy válasszunk ki néhány részhalmazt a fentiek közül, hogy a a kiválasztott részhalmazok U-nak legalább k elemét tartalmazzák és a kiválasztott részhalmazok összköltsége a lehető legkevesebb legyen. Mennyire tudjuk leszorítani a közelítés multiplikatív hibáját?
5. Az inputként megadott 2-élösszefüggő G gráfnak egy lehető legkevesebb élű 2-élösszefüggő feszítő részgráfját keressük. Igazoljuk, hogy az alábbi algoritmus ennek a feladatnak egy 2-közelítését adja. Válasszuk ki G egy F feszítőfáját, majd a $G-F$ gráfnak egy F' feszítő erdejét (azaz $G-F$ minden komponensének egy feszítőfáját). Az output az $F \cup F'$ élhalmaz.
6. Gyakoroljuk az SPT, LS ill LPT ütemezés keresését ill. az FF és FFD ládapakolási eljárásokat konkrét példákon.
7. Bizonyítsuk be, hogy minden $Pm||C_{\max}$ típusú ütemezési feladat esetén van a munkáknak olyan sorrendje, amire listás ütemezés (azaz az LS algoritmus) az adott inputhoz tartozó minimális átfutási idővel ütemez.
8. Tegyük fel, hogy a $J_1, J_2, \ldots$ munkákat az S ütemezés úgy ütemezni 42 gépre, hogy az átfutási idő 42, az átlagos átfutási idő pedig 24 legyen. Mutassuk meg, hogy ugyanezek a munkák ütemezhetők 21 gépre úgy, hogy az átfutási idő legfeljebb 84, az átlagos átfutási idő pedig legfeljebb 45 legyen. (Egyébként olyan ütemezés is van, amire az átfutási idő legfeljebb 84, az átlagos átfutási idő pedig legfeljebb 39.)
9. Tegyük fel, hogy 7 munka összvégrehajtási ideje 42. Igazoljuk, hogy lehetséges ezeket a munkákat egy gépre ütemezni úgy, hogy az átlagos átfutási idő legfelejebb 24 legyen.
10. Egy gépen 10 munkát 100 időegység alatt végeztünk el úgy, hogy az átlagos átfutási idő épp 68 volt. Mennyi idő alatt végeztük volna el a munkákat fordított sorrendben, és mennyi lett volna így az átlagos átfutási idő?
11. Az ábrán látható gráf csúcsai munkákat jelentenek, és minden csúcsra az adott munka megmunkálási ideje van ráírva. A gráf egy uv élének jelentése az, hogy a v munkát csak az u munka befejezése után lehet elkezdeni. Keressünk minimális átfutási idejű ütemezést arra az esetre, ha ugyanazon a gépen kell minden munkát elvégezni. Mennyi a minimális átfutási idő, ha tetszőlegesen sok gépet használhatunk?



   Határozzuk meg az átfutási időt 2 gépre történő listás ütemezés esetén, ha mindig azt a munkát ütemezzük következőnek az elvégezhetők közül, amelyik neve az ABC-ben a legelöl áll.
12. Tegyük fel, hogy a ládapakolási feladat egy konkrét inputjához az FF algoritmus 42 ládát használ fel. Bizonyítsuk be, hogy ha ugyanehhez az inputhoz két és félszer akkora ládák állnak rendelkezésre, akkor a konkrét feladatot az FF algoritmus meg tudja oldani legfeljebb 21 ládával. Bizonyítsuk be, hogy 21 ládánál kevesebbet az FF algoritmus nem tud garantálni.