Kombinatorikus optimalizálás 2023. II. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G egyszerû gráf csúcsainak egy *k-színezésén* az $1, 2, \ldots, k$ színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ függvény, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy ($k$-)színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztály*nak nevezzük. (Színosztályon belül G-nek nem futhat éle.) A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Megfigyelés: Ha G k-színezhető, akkor G-ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarnak. Gráfok csúcsainak színezésekor feltehető, hogy a gráf egyszerű.

Def: A G gráf *páros*, ha G 2-színezhető, azaz ha $\chi(G) \leq 2$.

Tétel: (A G gráf páros) $\iff$ (G-ben nincs páratlan kör)

Def: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k páronként szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.)

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független ponthalmaz* ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G-nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.

Megfigyelés: Ha G egyszerű, akkor $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ valamint $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$.

Mohó színezés: G csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő csúcs az első olyan színt kapja, ami nem különbözik a korábban kiszínezett szomszédai színétől.

Brooks tétele: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Állítás: Ha G véges gráf akkor $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

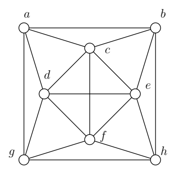
Vizing-tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

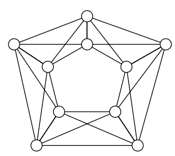
Shannon tétele: Tetsz. véges G gráfra $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

Vizing erősebb tétele: Tetsz. véges gráfra $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, ahol $\mu(G)$ a legnagyobb párhuzamos él multiplicitás G-ben.

Kőnig tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Gyakorlatok





1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma? (✓)
2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs? (✓)
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G páros gráfra, aminek a mohó színezéséhez n színre lehet szükség.
4. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
5. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma? (✓)
6. Van-e olyan G gráf, amiben nincs K_4 klikk, de G mégsem színezhető ki 3 színnel? (✓)

7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$. (✓)
8. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
9. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?
10. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?
11. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3$ $\forall v \in V$?
12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G+e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.
13. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1 - 1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.
14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
15. Órarendet kell készíteni az általános iskolában. Minden osztálynak legfeljebb 25, minden tanárnak pedig legfeljebb 22 órája van egy héten. Igaz-e, hogy biztosan készíthető olyan órarend, hogy minden hétköznap csak az első 5 órában legyen tanítás? (Lukas órája a tanároknak és az osztályoknak is lehet.)
16. Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
17. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)
18. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)

Kombinatorikus optimalizálás 2023. II. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G egyszerû gráf csúcsainak egy *k-színezésén* az $1, 2, \ldots, k$ színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ függvény, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy ($k$-)színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztály*nak nevezzük. (Színosztályon belül G-nek nem futhat éle.) A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Megfigyelés: Ha G k-színezhető, akkor G-ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarnak. Gráfok csúcsainak színezésekor feltehető, hogy a gráf egyszerű.

Def: A G gráf *páros*, ha G 2-színezhető, azaz ha $\chi(G) \leq 2$.

Tétel: (A G gráf páros) $\iff$ (G-ben nincs páratlan kör)

Def: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k páronként szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.)

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független ponthalmaz* ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G-nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.

Megfigyelés: Ha G egyszerű, akkor $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ valamint $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$.

Mohó színezés: G csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő csúcs az első olyan színt kapja, ami nem különbözik a korábban kiszínezett szomszédai színétől.

Brooks tétele: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Állítás: Ha G véges gráf akkor $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

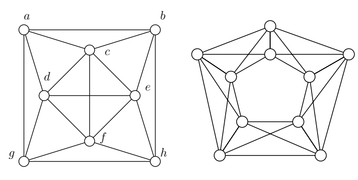
Vizing-tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Shannon tétele: Tetsz. véges G gráfra $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

Vizing erősebb tétele: Tetsz. véges gráfra $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, ahol $\mu(G)$ a legnagyobb párhuzamos él multiplicitás G-ben.

Kőnig tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Gyakorlatok



1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma? (✓)
2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs? (✓)
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G páros gráfra, aminek a mohó színezéséhez n színre lehet szükség.
4. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
5. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma? (✓)
6. Van-e olyan G gráf, amiben nincs K_4 klikk, de G mégsem színezhető ki 3 színnel? (✓)

7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$. (✓)
8. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
9. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?
10. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?
11. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3\ \forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3\ \forall v \in V$?
12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G+e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.
13. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1 - 1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.
14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
15. Órarendet kell készíteni az általános iskolában. Minden osztálynak legfeljebb 25, minden tanárnak pedig legfeljebb 22 órája van egy héten. Igaz-e, hogy biztosan készíthető olyan órarend, hogy minden hétköznap csak az első 5 órában legyen tanítás? (Lukas órája a tanároknak és az osztályoknak is lehet.)
16. Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
17. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)
18. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)