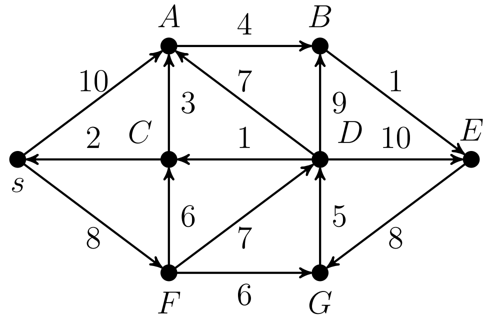
SzA VII. gyakorlat, 2013. október 22/24.
Folyton folyvást folyamok

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

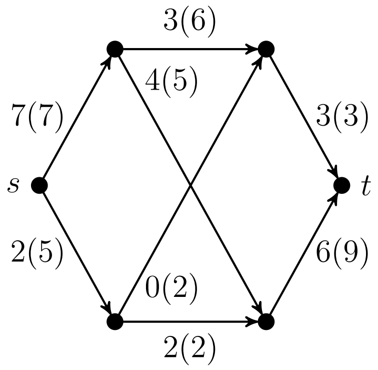
1. **Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legszélesebb utakat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!**



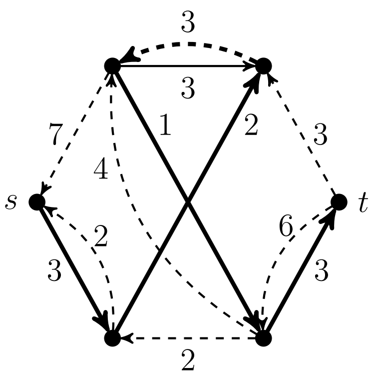
s	A	B	C	D	E	F	G	KÉSZ
$\underline{0}$	**10**	∞	∞	∞	∞	8	∞	s
$\underline{0}$	$\underline{10}$	4	∞	∞	∞	**8**	∞	s, A
$\underline{0}$	$\underline{10}$	4	6	**7**	∞	$\underline{8}$	6	s, A, F
$\underline{0}$	$\underline{10}$	**7**	6	$\underline{7}$	7	$\underline{8}$	6	s, A, D, F
$\underline{0}$	$\underline{10}$	$\underline{7}$	6	$\underline{7}$	**7**	$\underline{8}$	6	s, A, B, D, F
$\underline{0}$	$\underline{10}$	$\underline{7}$	6	$\underline{7}$	$\underline{7}$	$\underline{8}$	**7**	s, A, B, D, E, F
$\underline{0}$	$\underline{10}$	$\underline{7}$	**6**	$\underline{7}$	$\underline{7}$	$\underline{8}$	$\underline{7}$	s, A, B, D, E, F, G
$\underline{0}$	$\underline{10}$	$\underline{7}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$	$\underline{7}$	$\underline{8}$	$\underline{7}$	s, A, B, C, D, E, F, G

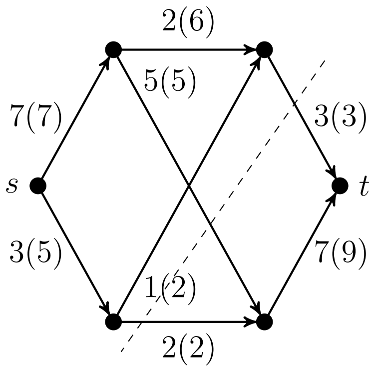
Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

2. **Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!**

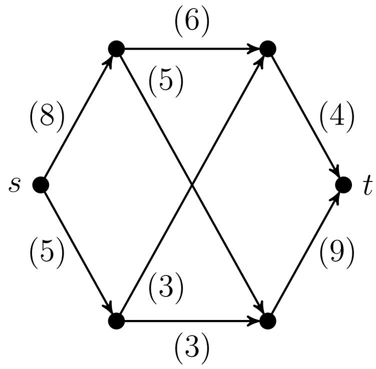


Bal oldalt szerepel a javítógráf, szaggatottal jelölve a visszafele tartó élek, valamint vastagítva egy javítóút, ahol a minimális érték 1. A javítást elvégezve 1 értékkel a jobb oldalon szerepel az eredményül előálló folyam.

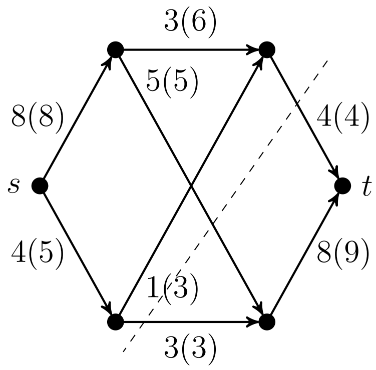




Egyébként a szagattottal jelölt vágás értéke 10, valamint a folyamunk is 10 értékű, tehát a vágás minimális, a folyam pedig maximális, így hiába is próbálnánk tovább javítani.

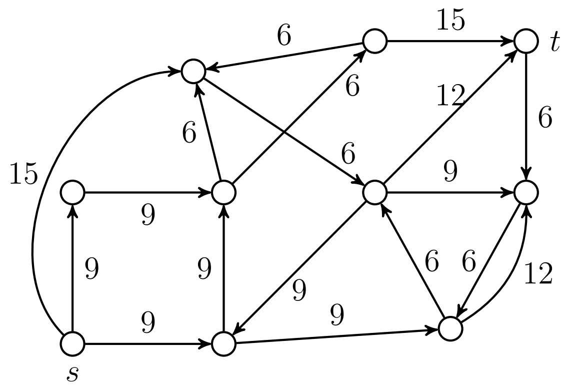


3. **Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!**
Alább látható egy 12 értékű folyam és egy szintén 12 értékű vágás. Így láthatjuk, hogy van egy maximális folyamunk és egy minimális vágásunk. Az eredményt megkaphattuk a javítóutas algoritmussal, de akár ránézésre is.



---

4. **[ZH 2008. október 10.] Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)**



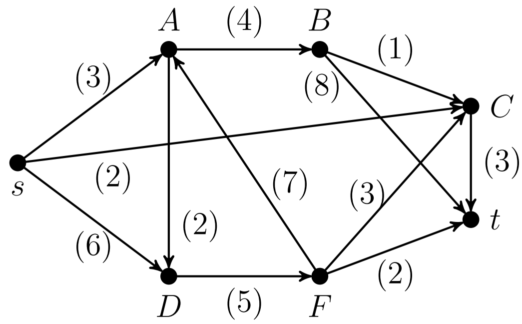
A maximális folyamnagyság megegyezik a minimális st-vágás értékével. (3 pont)
Mivel minden él kapacitása 3-mal osztható, (2 pont)
ezért a minimális vágáskapacitás is 3 többszöröse (2 pont)

tehát a maximális folyamnagyság is 3-mal osztható. (2 pont)
A 17-et 3-mal osztva 2 maradékot kapunk, ezért a maximális folyamnagyság nem lehet 17. (1 pont)

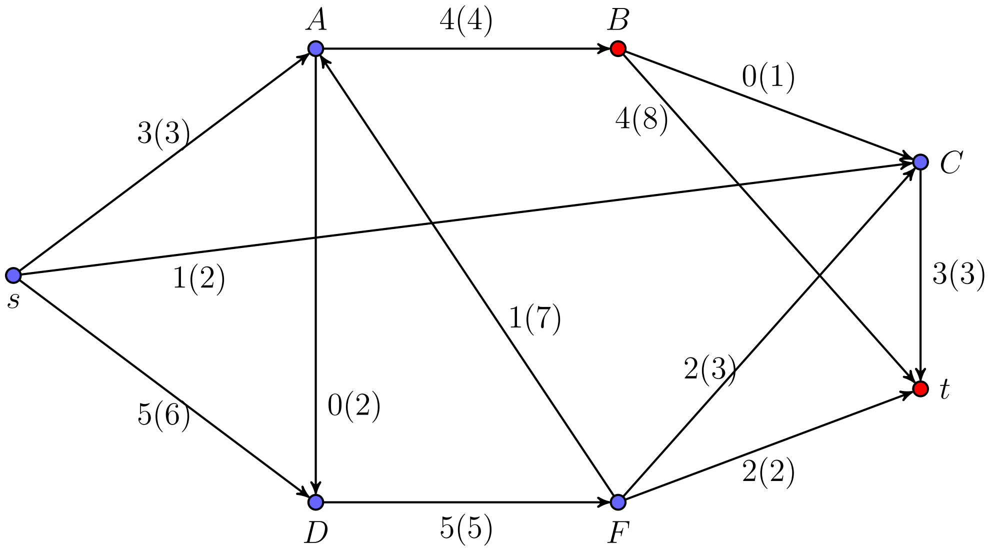
Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

A javító utak módszerével meghatározunk egy maximális folyamot, ami itt 18 értékű lesz. (8 pont)
Tehát a maximális folyamnagyság 18, vagyis semmiképp sem 17. (2 pont)
(Nem rajzolom le.)

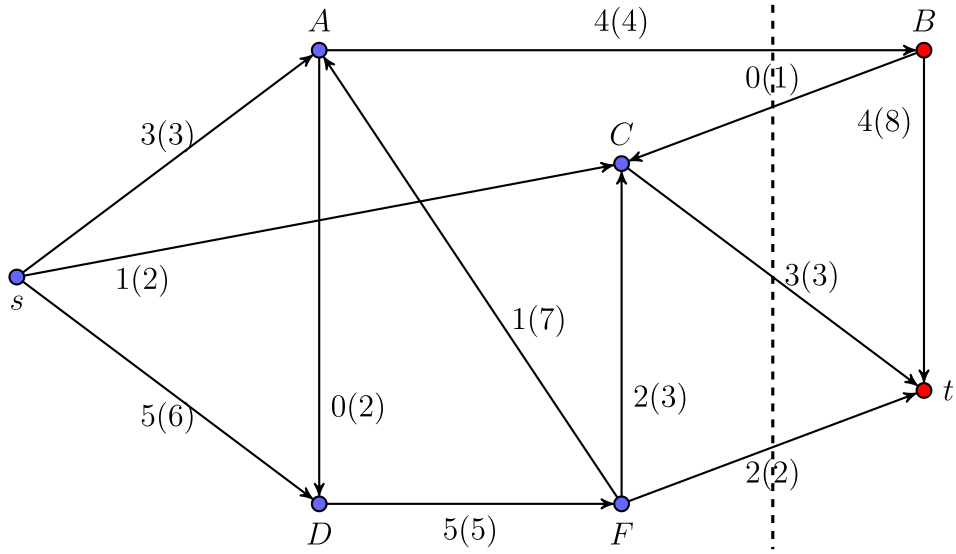
5. **Határozzunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a következő hálózatban!**



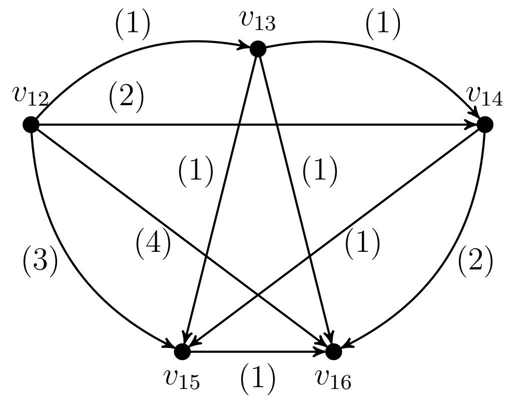
A lépéseket nem írom le, a végeredmény:



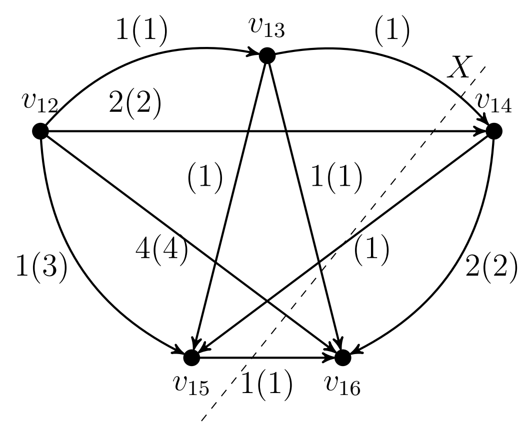
A vágást nehéz lenne szépen berajzolni, kékesen és pirosasan szerepelnek a két osztályba tartozó csúcsok. Átrajzolva, és a vágást jelölve:



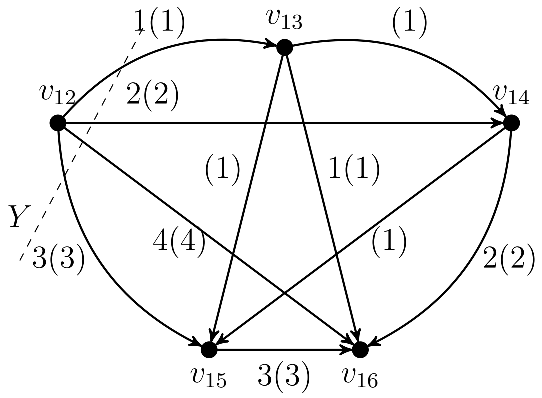
6. **[pZH 2011. december 1.] A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?**
Megjegyzés: (i, j)-vel jelöljük i és j számok legnagyobb közös osztóját.
Az ábrán látható az adott hálózat diagramja. (2 pont)



Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamot, mégpedig a (v_{12}, v_{16}), (v_{12}, v_{14}, v_{16}), (v_{12}, v_{13}, v_{16}) és (v_{12}, v_{15}, v_{16}) utakon rendre 4-et, 2-t, ill. 1-et, 1-et javítva, az eredményül előálló értékek az ábrán láthatók. A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az ábrán szaggatottal jelölt 8 kapacitású X vágás bizonyítja. (4 pont)



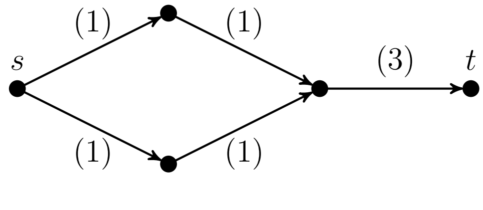
Ha most a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását kellően nagynak választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága (v_{12}, v_{15}, v_{16}) úton. Így kapjuk a következő ábrán szereplő, 10 nagyságú folyamot, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az ott jelölt Y vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15}v_{16}$ élet. (2 pont)



Ahhoz, hogy az X vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

7. **Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. A fejébe veszi, hogy úgy szeretné ezt megtenni, hogy minden utcán egy hét alatt legfeljebb egyszer menjen végig (a hazafelé utak nem számítanak). Adjunk meg olyan algoritmust, mellyel a kisváros térképe alapján eldönthető, hogy megtehető-e ez!**
Feleltessünk meg egy hálózatot a kisváros térképének! Az élek az utcák megfelelő irányítással, a kezdőpont (s) a ház, a végpont (t) a polgármesteri hivatal. Legyen minden él kapacitása 1! Ekkor pontosan akkor létezik 5 éldiszjunkt út, ha létezik s és t között egy legalább 5 értékű folyam. Ezt a javító utas algoritmussal könnyű ellenőrizni.

8. **Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?**
Az első nem igaz, ellenpélda alant. A második igaz, mert ha minden élnek páros a kapacitása, és kezdetben egy 0 értékű folyamból indulunk, akkor a javítóutas algoritmus minden lépésben páros számmal változtatja a folyamértéket, így minden élen mindig páros érték fog szerepelni, értelemszerűen a maximális esetben is.



9. **Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását csökkentve a maximális folyamnagyság csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását növelve, a maximális folyamnagyság növekszik?**
Első eset: feltételezve, hogy a max folyam nagyobb nullánál, igaz. Ekkor ugyanis egy minimális vágásban egy tetszőleges él kapacitását csökkentve kisebb lesz a vágás értéke, tehát a maximális folyam értéke is csökken. Második eset: nem igaz, ellenpélda: olyan gráf, ahol két, egymástól független minimális vágás is van.

10. **[ppZH 2012. december 12.] Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.**

Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy a C kör uv éle egy minimális kapacitású st-vágáshoz tartozik. Legyen X az az s-t tartalmazó, t-t elkerülő ponthalmaz, ami ezt a minimális kapacitású vágást meghatározza. (2 pont)

Az órán tanultak miatt ha f maximális nagyságú folyam, akkor minden X-ből $V(G) \setminus X$-be futó e él telített, azaz $f(e) = c(e)$ teljesül, míg egyetlen $V(G) \setminus X$-ből X-be futó e' él sem hordoz folyamot, azaz $f(e') = 0$. (4 pont)

Mivel a C irányított körnek van a vágáshoz tartozó, azaz X-ből $V(G) \setminus X$-be futó éle, ezért kell lennie a C körnek olyan g élének is, ami $V(G) \setminus X$-ből X-be fut. (2 pont)

A feladtbeli feltevés szerint a g élen is pozitív nagyságú folyam folyik, ez pedig ellentmond f maximalitásának. (1 pont)

A kapott ellentmondás igazolja a feladatban megfogalmazott állítást. (1 pont)

11. **Adott két hálózat $(G_1; s_1; t_1; c_1)$ és $(G_2; s_2; t_2; c_2)$, melyeknek a csúcshalmazai diszjunktak. Legyen az elsőben f_1, a másodikban f_2 a maximális folyam értéke. Mekkora lesz a maximális folyam abban a hálózatban, amelyet ezekből soros- $(t_1 = s_2, s = s_1, t = t_2)$ illetve párhuzamos $(s = s_1 = s_2, t = t_1 = t_2)$ összekapcsolással kapunk?**

Soros kapcsolás esetén G_1-ben lévő és a G_2-ben lévő minimális vágás továbbra is vágás marad az eredményül kapott G-ben, náluk kisebb vágás nem keletkezhet, így $f = \min\{f_1, f_2\}$. Párhuzamosnál nem kaphatunk kisebb vágást, mint amikor a két gráfból egyenként a minimálisat vesszük, tehát az G-ben a minimális vágás az f_1-hez és f_2-höz tartozók uniója lesz, így $f = f_1 + f_2$. (Értelemszerűen felhasználtuk, hogy a minimális vágás értéke megegyezik a maximális folyam értékével. Egyébként enélkül is meg lehetett volna oldani, ha konkrétan a folyamokat néztük volna.)