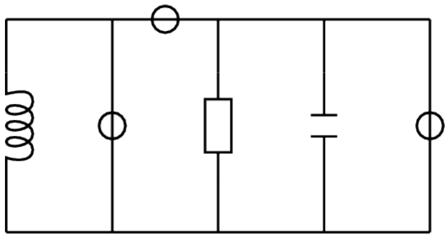
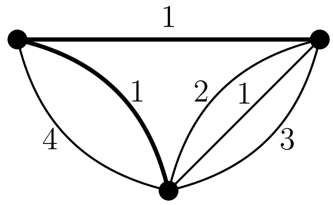
SzA VI. gyakorlat, 2013. október 15/17.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Körözünk, fázunk, utazunk

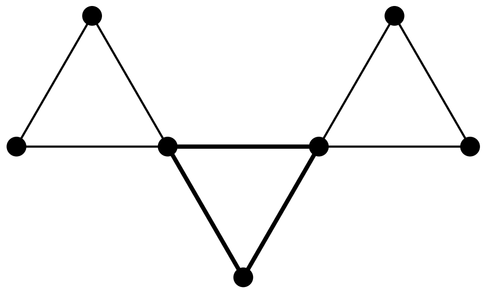
1. **Egyértelműen megoldható-e a következő villamos hálózat? (Segítségképpen a hozzá tartozó gráf is fel van rajzolva.)**



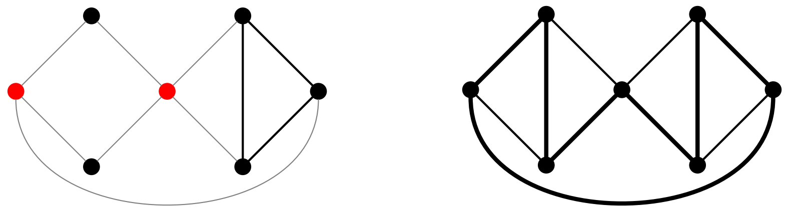


Egy minktg feszfa vastaggal jelölve az ábrán. Ebből látszik, hogy van olyan 1 súlyú él, ami kimaradt, tehát nem.

2. **[ZH 2006. március 28.] Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?**
Nem, egy ellenpélda, ami teljesíti a feltételeket, de a vastag élek által alkotott kört elhagyva a gráf mégsem lesz öf:

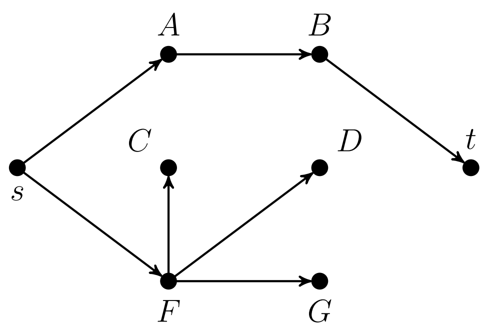


3. **Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!**

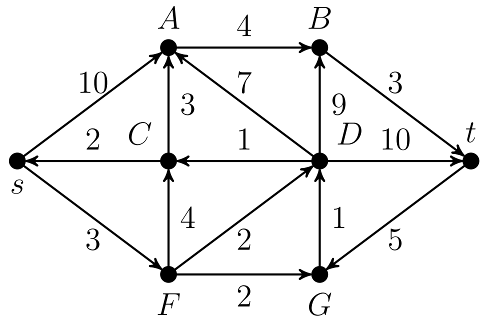


A bal oldaliban pirossal jelölve két csúcs, amiket elhagyva a gráf 3 részre esik szét, vagyis nem lehet benne H-kör. A jobb oldalon pedig vastaggal jelölve egy H-kör.

4. **Készítsük el a következő gráf szélességi bejárását!**
Például így, ha az s csúcsból indulunk:



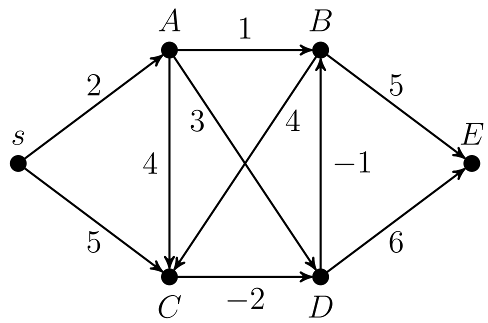
5. **Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legrövidebb utakat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!**

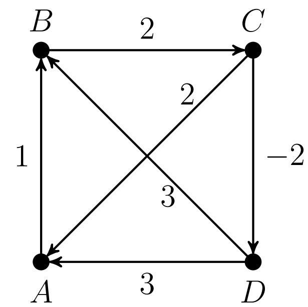


s	A	B	C	D	t	F	G	KÉSZ
$\underline{0}$	10	∞	∞	∞	∞	**3**	∞	s
$\underline{0}$	10	∞	7	**5**	∞	$\underline{3}$	5	s, F
$\underline{0}$	10	14	6	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	**5**	s, D, F
$\underline{0}$	10	14	**6**	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, D, F, G
$\underline{0}$	**9**	14	$\underline{6}$	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	**13**	$\underline{6}$	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	$\underline{13}$	$\underline{6}$	$\underline{5}$	**15**	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, B, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	$\underline{13}$	$\underline{6}$	$\underline{5}$	$\underline{15}$	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, B, C, D, t, F, G

Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

6. **Határozzuk meg a baloldali gráfban Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb utat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!**
Külön pdf-ben, nagyon részletesen.





7. **Határozzuk meg a Floyd algoritmussal a legrövidebb utat az összes pontpár között a fenti jobb oldali gráfban!**
Kiinduló szomszédossági mx:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

A csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & \mathbf{3} & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

B csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{3} & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \mathbf{5} & 0 \end{pmatrix}$$

C csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

D csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

---

8. **[pótpótZH 2010. ősz] A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?**

A G gráfot úgy kapjuk, hogy egy teljes (így öf) gráfba további éleket húzunk be, így G mindenféleképp öf lesz. (1 pont)

Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha minden csúcsának páros a fokszáma. (3 pont)

Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért G-nek 10 csúcsa van. (1 pont)

A K_{10} gráfban minden pont foka 9, ezért G-ben pontosan akkor lesz minden pont foka páros, ha F minden csúcsának a foka páratlan. (2 pont)

Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (1 pont)

márpedig a konkrét Prüfer-kódban minden csúcs ps sokszor szerepel (a 0 is ps szám). (1 pont)

Tehát F-ben minden fok ptn, így G-ben minden fok ps, vagyis van Euler-körséta G-ben. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

1	4	6	7	8	9	3	5	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10

Felrajzoljuk (amit itt most nem teszek meg). (5 pont)

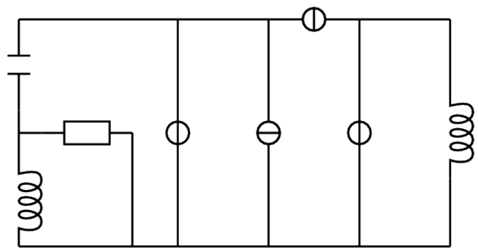
Ha F csúcsaira még egy teljes gráfot illesztünk, akkor az így kapott gráf öf marad, (1 pont) és minden csúcsának a foka ps lesz, hisz F-ben is és K_{10}-ben is minden csúcs foka páratlan. (1 pont)

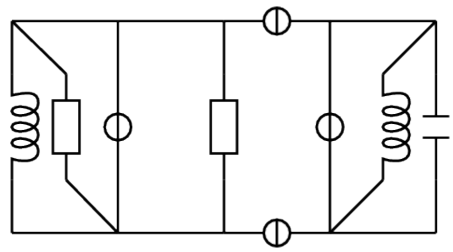
Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek van Euler-körsétája. (3 pont)

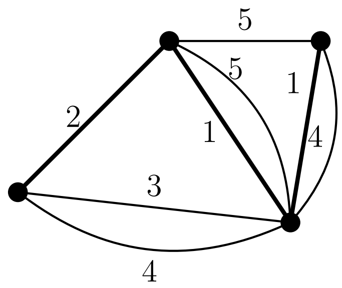
9. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**

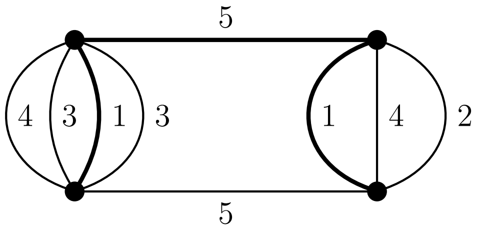
Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

10. **Egyértelműen megoldhatók-e a következő villamos hálózatok?**









Felrajzolva a hozzájuk tartozó gráfot minimális feszítőfakeresés után megállapítjuk, hogy a bal oldaliban találtunk egy normál fát (minden 1-es él szerepel benne, és nem szerepel benne 5-ös), míg a jobb oldaliban nem (a feszítőfában szerepel 5-ös). A minktg feszfa vastagítva van.

11. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**
Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint a korábbi feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

12. **[ZH 2012. november 22.] Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.**
Ore tanult tétele szerint ha egy n pontú egyszerű G gráf bármely két nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor G-nek van Hamilton köre. (3 pont)
Ha tehát u és v szomszédosak, akkor teljesül az Ore tétel, van tehát G-ben Hamilton kör, (2 pont)
ebből egy élt törölve pedig G Hamilton útját kapjuk. (1 pont)
Ha pedig u és v nem szomszédosak, akkor húzzunk be közéjük egy élt, és nevezzük G'-nek a kapott gráfot. (2 pont)
Mivel G'-re már teljesül az Ore feltétel, ezért G'-ben van Hamilton kör, (1 pont)
ami még az uv él törlése után is tartalmazza G egy Hamilton útját. Ezzel mindkét esetben igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

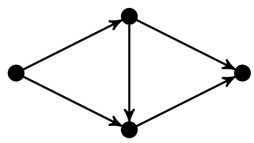
13. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk

pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet, mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyunk el 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

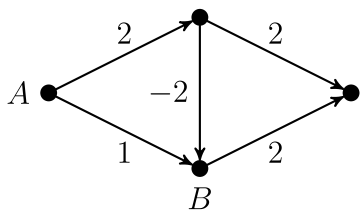
14. **Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k + 2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k + 1$), így mindegyik legalább $k + 1$. A Dirac-tétel szerint ebben a gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka" pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

15. **[pZH 2011. december 1.] Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.**
Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)
Ezek szerint G-ben minden fokszám páros. (2 pont)
A $\bar{G}$ komplementergráfban a v csúcs foka $d_{\bar{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)
ezért $\bar{G}$-ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)
Egyedül annak igazolása van hátra, hogy $\bar{G}$ összefüggő. Ez következik pl. a Dirac-tételből, hiszen $\bar{G}$-ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$. (3 pont)
Az utolsó 3 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a $\bar{G}$-beli minimális fokszám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.

16. **[ZH 2008. október 10.] Határozzuk meg ebben a gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!**

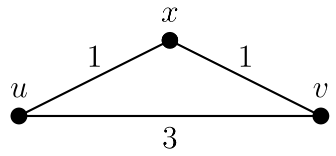


Attól, hogy rakunk bele negatív élsúlyt, még akár működhetne! Úgy kell negatív élsúlyt belerakni, hogy romoljon el. Az ábrán látható súlyozással az A csúcsból kiindulva a B csúcsra az algoritmus 1-et mond, pedig a legrövidebb út oda 0 lenne.



17. **[pótpótZH 2010. ősz] Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l' élhosszokra nézve is?**
A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)
Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések

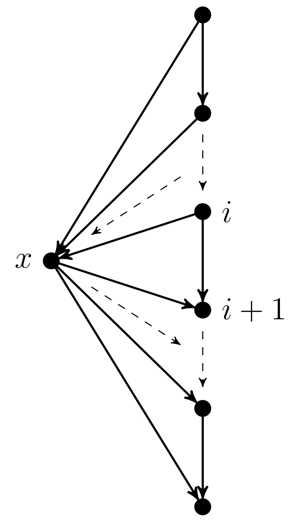
után. (3 pont)
Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



18. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \dots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?**
Tanultuk, hogy az F fában minden v_1-ből vezető út a G gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \dots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle G-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne v_1-ből rövidebb út, mint a fabeli. (3 pont)
A G gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \dots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az F fa az így kapott G gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)
Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a G gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az F élszáma. (2 pont)

19. **A G irányított gráfról tudjuk, hogy pontosan egy negatív él van benne, és nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. Az s csúcsból szeretnénk legrövidebb utat találni az összes többibe. Hogy tudnánk ezt megtenni a Dijsktra algoritmus (esetleg többszöri) felhasználásával?**
Egy legrövidebb út kétféle lehet: vagy használja a negatív élet, vagy nem. Először futtassunk egy Dijsktrát (a szépség kedvéért hagyjuk ki a negatív élet), az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát jelölje d_i^+. Jelölje u azt a csúcsot, amiből a negatív él indul. Világos, hogy d_u^+ helyes, hiszen a negatív élen nem mehetünk át az ő eléréséhez az eredeti gráfban. Belőle is indíthatunk egy Dijsktrát (az eredeti gráfon), hiszen ekkor először a negatív él másik végpontját veszi be a KÉSZ halmazba, ami a definíciónak megfelel. Ezeket a legrövidebb értékeket jelölje d_i^-. A legrövidebb utak tehát $\min(d_i^+, d_u^+ + d_i^-)$ képlettel számolhatók. Így két Dijsktra segítségével kész is vagyunk.

20. **Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!**
Teljes indukcióval. $n = 1$ csúcs esetén triviálisan igaz. Tfh valamilyen n-re igaz, vizsgáljuk meg $n+1$-re! Az $n+1$ csúcsú teljes gráfból elhagyva egy tetszőleges x pontot egy n csúcsút kapunk, amiben az indukciós feltétel miatt van irányított H-út. Ha x-ből pont ezen H út elejére mutat él, vagy a H-út végéből pont x-be mutat él, akkor x-et a H-út elejére vagy végére téve pont egy jó irányított H-utunk lesz. Baj csak akkor van, ha az ábrán látható eset áll elő. Ekkor viszont biztos van az úton olyan i csúcs, hogy i-ből x-be mutat él, és x-ből $i+1$-be (ha nem így lenne, akkor a már kezelt esetek egyikét kapnánk). Ide beillesztve x-et egy jó H-utat kapunk.



x
i
$i+1$