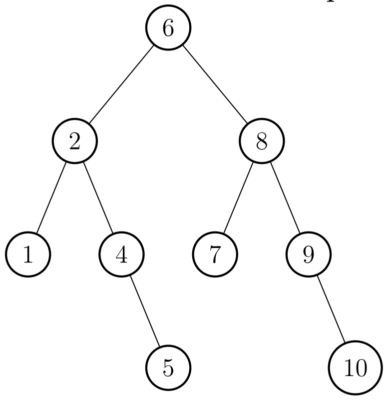
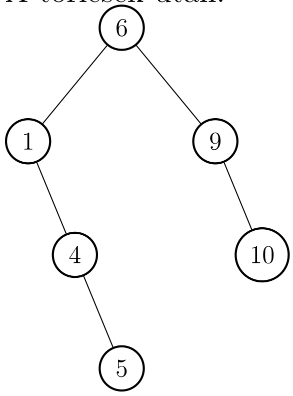
SzA IV. gyakorlat, 2013. október 1/3.
Keresőfázás, valamint barátkozás a gráfokkal

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

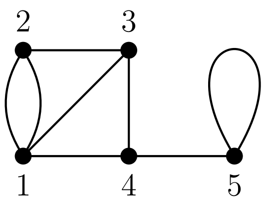
1. **Szúrjuk be egy kezdetben üres bináris keresőfába a 6, 2, 1, 4, 5, 8, 9, 7, 10 elemeket, majd töröljük a 7, 8, 2 elemeket!**
   A beszúrások utáni állapot:

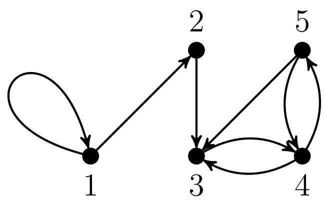


A törlések után:



2. **Írjuk fel a következő gráfok szomszédossági mátrixát!**





$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

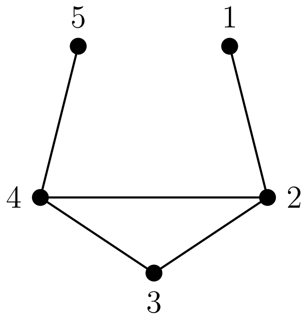
3. **[ZH 2009. november 23.] A következő tömbök egy gráf szomszédossági listáját írják le. A csúcshoz tartozó mutatók listája:**

3	6	5	4	2

. Az éleket leíró láncolt lista:

4	4	2	3	2	3	2	4	5	1
10	*	*	7	8	1	9	*	*	*

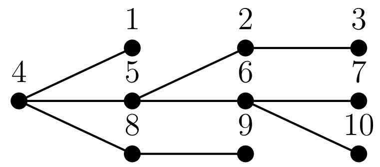
Rajzolja le a gráfot!

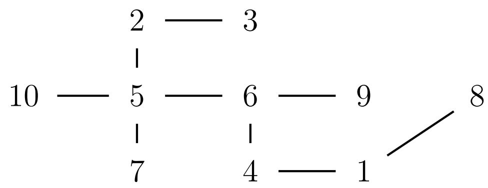


4. (a) **Mi a Prüfer-kódja a következő fának?**

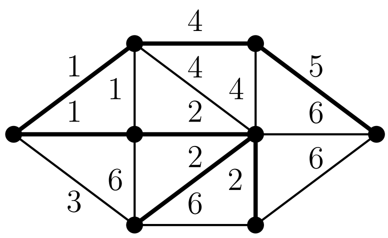
   $4, 2, 5, 6, 8, 4, 5, 6$

   (b) **Rajzoljuk le azt a fát, aminek** $2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5$ **a Prüfer-kódja!**





5. **Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**



Egy lehetséges megoldás az ábrán jelölve. A 3 darab 1 súlyú élek közül pontosan bármelyik kettőt kell választani, és két 4 súlyú él közül pontosan 1-et kell választani. Más választási lehetőség nincs, ezek viszont függetlenek. Így a lehetőségek száma: $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$.

---

6. **Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú keresőfa. A két fában tárolt összes elemből $c(n+k)$ lépésben készítsünk rendezett tömböt!**

   Kiolvassuk inorder bejárással rendezetten a két fában tárolt elemet egy-egy tömbbe/listába (n és k lépés), majd ezeket összefésüljük ($n+k$ lépés). Összegezve $c(n+k)$ lépés. (Persze az inorder bejárás közben azonnal is csinálhatjuk az összefésülést.)

7. **Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy $KERES(x)$ hívás során a keresési út mentén a $20, 18, 3, 15, 5, 8, 9$ kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha lehetséges, határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet! Ha nem lehetséges, miért nem?**

   Lehet, hiszen az $x < 20$, $x < 18$, $x > 3$, $x < 15$, $x > 8$, $x \neq 9$-et kielégítő szám lehet, vagyis $9 < x < 15$ közül bármi jó, valamint a keresőfa tulajdonság sem sérül sehol.

8. **Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B-beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U-beli csúcs kulcsánál, és minden U-belis csúcs kulcsa kisebb tetszőleges J-beli csúcs kulcsánál?**

   Nem, ellenpéldát lehet rá adni egyszerűen: a gyökérben mondjuk legyen 1, ennek (egyetlen) fia 3, ennek pedig két fia, 2 és 4. Az út: $\{1, 3, 4\}$, ettől balra van 2, ami nem kisebb, mint 1.

9. **Adott 2^k-1 különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy k mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjunk olyan algoritmust, amely ezt $c \cdot n$ lépésben megcsinálja!**

   $2^k - 1$ számot tudunk egy pontosan k szintű teljes bináris keresőfában tárolni, így ilyet fogunk csinálni. Mivel a fa alakja adott, csak azt kell kitalálni, hogy melyik szám melyik csúcsba kerüljön. Viszont azt is tudjuk, hogy egy bináris keresőfát inorder bejárva a benne tárolt elemeket növekvő sorrendben kapjuk meg. Így meg tudjuk tenni, hogy felépítünk egy „biankó” k szintű teljes bináris fát, futtatunk rá egy inorder bejárást, és a növekvően rendezett elemeinkből egy csúcs meglátogatásakor mindig odarakjuk a következőt. A számok különbözősége miatt $2^k - 1 \le n$, így a fa felépítésének lépésszáma $2^k - 1 \le c \cdot n$, a számok ládarendezése (minden feltétel adott az alkalmazhatósághoz) $2^k - 1 + n \le 2n = c \cdot n$, majd a bejárás $2^k - 1 \le c \cdot n$. Ezeket összegezve a lépésszám $c \cdot n$.

---

10. **Adott egy 5 pontú gráf élek nélkül. Írjuk fel a láncolt szomszédossági listáját, majd húzzuk be sorrendben a következő (irányítatlan) éleket: (1,3), (4,5), (5,5), (2,3), (1,2), (3,4), (1,4), (1,2).**

    Csak a végeredményt írom fel. A csúcshoz tartozó mutatók listája:

14	15	10	13	5

    Az éleket leíró láncolt lista:

3	1	5	4	5	3	2	2	1	4	3	4	1	2	1
*	*	*	*	4	*	2	1	6	7	3	8	11	12	9

    Reményeim szerint nem írtam el semmit, de azért van rá esély, hogy mégis.

11. **[pótZH, 2011. december 1.] Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:**

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

    Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

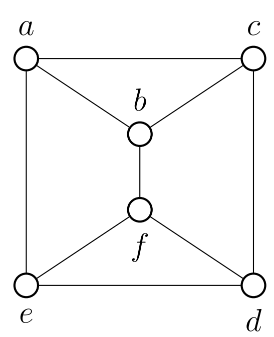
    Mivel G egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a szomszédossági mátrix főátlójában csak 0-k szerepelnek. (2 pont)

    Irányítatlan gráfról lévén szó a szomszédossági mátrix szimmetrikus, azaz tetszőleges i, j-re ugyanaz a szám áll az (i, j) és a (j, i) helyeken. (2 pont)

    Tudjuk még, hogy G 3-reguláris, ezért a mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 3 a beírt számok összege. (2 pont)

    Ennek alapján a mátrix könnyen kiszudokuzható az alábbiak szerint: (2 pont)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



    A jobb oldali ábra pedig G egy lehetséges diagramját mutatja. (2 pont)

12. **Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?**

    A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

13. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.**
A K_6 teljes gráfnak $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ éle van. (3 pont)
Az élekhez választott lehetséges számhármasok száma $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. (3 pont)
Mivel $15 > 10$, ezért a skatulya-elv szerint lesz két olyan él, amihez ugyanaz a számhármas tartozik. (4 pont)

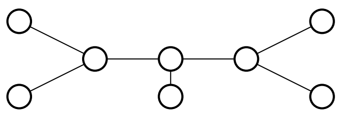
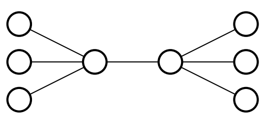
14. **Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!**
Tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:
$$\sum_{v\in V} d(v) = 2e,$$
ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

15. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**
Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n-1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2} - e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n - 1 = \binom{n}{2} - (n-1)$, ahonnan $n = 1$ vagy $n = 4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag") felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

16. **[ZH, 2011. október 13.] Az F fa Prüfer kódja** $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$**. Hány éle van F komplementerének?**
A Prüfer kód hossza 10, ezért az általa kódolt fának 12 csúcsa van. (2 pont)
Ezért az F fa élszáma 11. (3 pont)
A 12 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$, (3 pont)
ezért a komplementernek $66 - 11 = 55$ éle van. (2 pont)

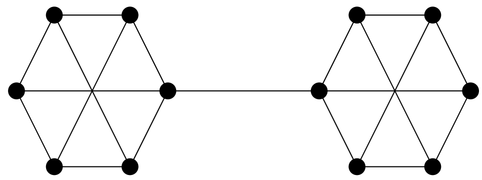
Természetesen nem tilos F meghatározása sem. Aki csak ennyit tesz, annak az első 5 pont jár.

17. **Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?**
Az egyik fokszám nyilván 1, és $x \geq 2$ van belőle. A másik legyen d, és $8 - x$ van belőle. Felírva a fokszámok és élszámok közötti összefüggést, tudván, hogy 7 élünk van:
$$x \cdot 1 + (8 - x)d = 2 \cdot 7,$$
ahonnan $d = 1 + \frac{6}{8-x}$. Így az egészség követelménye és a feltételek alapján a következő megoldások lehetségesek:

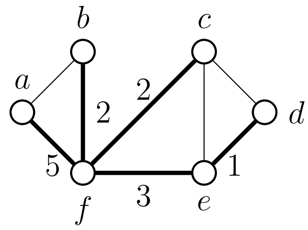
- $(x = 2, d = 2)$, és ilyen fa létezik is: egy 8 hosszú út.
- $(x = 5, d = 3)$, és ilyen fa létezik is: 
- $(x = 6, d = 4)$, és ilyen fa létezik is: 
- $(x = 7, d = 7)$, és ilyen fa létezik is: egy 7 ágú csillag.

Fontos, hogy az eredményeket ellenőriztük is, azaz igazoltuk, hogy tényleg létezik a megfelelő fa.

18. **[pótZH, 2008. december 5.] Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű G gráfnak, amiben minden pont fokszáma legalább 3?**
Felírva a fokszámok és élszám közötti összefüggést, majd a feltétel szerint felírva az egyenlőtlenséget:
$$2 \cdot 19 = \sum d(v) \geq 3n,$$
ahonnan $n \leq 12$. Ilyen gráfot tudunk is rajzolni, pl.:



19. **[ZH, 2011. október 13.] Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.**



Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F-beli úton lévő élek súlyainak maximuma. (3 pont)
Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (3 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

20. **Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?**
Tudjuk, hogy minden sorszám pontosan az adott pont fokszámánál eggyel kevesebbszer szerepel a kódban. Az elsőfokú pontok tehát pontosan 0-szor szerepelnek. Ha kódban n pont közül k féle szerepel, akkor $n - k$ féle nem, vagyis ennyi elsőfokú pont van.

21. **Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?**
A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n - 1 + 1 = n$ csúcsú a gráf.

22. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k - 1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l - 1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k - 1) \cdot 1 + (l - 1) \cdot 2 + 3 = k + 2l$.

23. **Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?**
    Igaz, mert egyszrészt ha G összefüggő, akkor kész vagyunk, ha pedig G nem összefüggő, akkor a komplementere az lesz (bizonyítás a 27. feladatban).

24. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
    Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2+d = 2e = 2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n-2$ másodfokú pont lenne.

25. **Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?**
    Számozzuk meg a csúcsokat az $1\dots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i<j<\dots<k<i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

26. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**
    Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k-1$ lehet, viszont $k-1\le n/2-1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2\le d_i\le n/2-1$, ami lehetetlen.

27. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
    Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak, és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcsot: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x-szel és y-nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

28. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)|-|E(G)|$ komponense van.**
    Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1,n_2,\dots,n_k$ csúccsal. (2 pont)
    Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
    és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
    Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)|\ge n_1-1+n_2-1+\ldots+n_k-1 = n_1+n_2+\ldots+n_k-k = |V(G)|-k$. (3 pont)
    Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

    Persze másképp is érvelhetünk.

    Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
    Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
    Ezek szerint $k+|E(G)|\ge|V(G)|$, (3 pont)
    és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k\ge|V(G)|-|E(G)|$. (1 pont)

29. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1-e_1+e_2$ és $T_2-e_2+e_1$ is fa.**

Az e_2-nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a $T_1 - e_1$ két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.